Correction DS3 CUBES

Exercice (eml 2021 - sans la partie C)

Partie A

1)φ est continue sur $]-\infty,1[$ comme somme, produit et composée de fonctions continues.

De plus, $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ par croissances comparées.

$\lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$. Par somme, $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x) = 1 = \varphi(1)$.

Donc φ est continue à gauche en 1.

On conclut que φ est continue sur $]-\infty,1]$.

2)a)φ est de classe C^1 sur $]-\infty,1[$ comme somme, produit et composée de fonctions de classe C^1.

Pour tout $x<1$, on a :

$\varphi'(x) = 1 + (-1)\times\ln(1-x) + (1-x)\times\left(\dfrac{-1}{1-x}\right) = -\ln(1-x)$.

b)$\varphi'(x)\geq 0 \iff \ln(1-x)\leq 0 \iff 1-x\leq 1 \iff x\geq 0$.

Donc φ est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,1[$.

> Remarque
> φ étant continue en 1 et croissante sur $[0,1[$, elle est également croissante sur $[0,1]$.

c)Pour tout $x<1$, on a :

$\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \dfrac{x+(1-x)\ln(1-x)-1}{x-1} = \dfrac{x-1-(x-1)\ln(1-x)}{x-1}$

$= \dfrac{(x-1)\big(1-\ln(1-x)\big)}{x-1} = 1-\ln(1-x)$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1-x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = +\infty$.

Donc φ n'est pas dérivable (à gauche) en 1.

> Remarque
> $\mathscr{C}_\varphi$ admet donc une tangente verticale d'équation $x=1$.

3)Quand $x\to-\infty$, on a une forme indéterminée du type $(-\infty)+(+\infty)$.

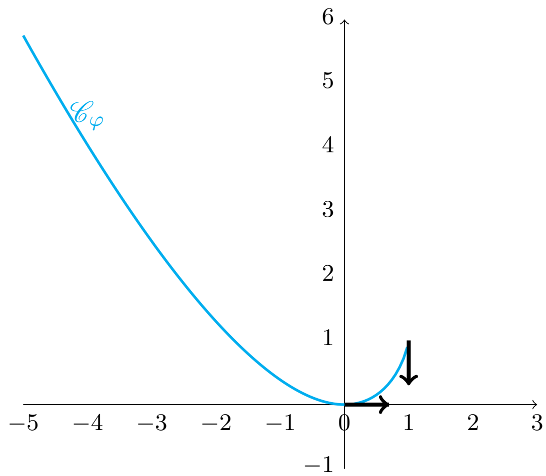
Posons $t=1-x$ ou $x=1-t$. Quand $x\to-\infty$, $t\to+\infty$.

Puis, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{t\to+\infty}(1-t+t\ln t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\big(1+t(\ln t-1)\big)$.

Or, $\lim\limits_{t\to+\infty} t = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}(\ln t-1) = +\infty$.

Par produit, $\lim\limits_{t\to+\infty} t(\ln t-1) = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = +\infty$.

4)Courbe.



5)a)L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln t dt$ est impropre en 0.

Soit $x \in]0,1]$. Faisons une IPP sur $\displaystyle\int_x^1 t\ln t dt$ en posant :

$u'(t) = t \qquad v(t) = \ln t$

$u(t) = \dfrac{t^2}{2} \qquad v'(t) = \dfrac{1}{t}$

u et v sont de classe C^1 sur $[x,1]$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}
\int_x^1 t\ln t dt &= \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}dt \\
&= 0 - \frac{x^2}{2}\ln x - \int_x^1 \frac{t}{2}dt \\
&= -\frac{x^2}{2}\ln x - \left[\frac{t^2}{4}\right]_x^1 \\
&= -\frac{x^2}{2}\ln x - \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{4}\right) \\
&= -\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4}.
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{4} = 0$.

Par somme, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 t\ln t dt = -\frac{1}{4}$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 t\ln t dt$ converge et vaut $-\dfrac{1}{4}$.

b)L'intégrale $\int_0^1 \varphi(x)dx$ est impropre en 1.

Soit $A \in [0,1[$. On effectue un changement de variable dans $\int_0^A \varphi(x)dx$ en posant : $t = 1 - x$.

• $t = 1 - x \Longleftrightarrow x = \underbrace{1 - t}_{\psi(t)}$.

• bornes :
$x = 0 \Longleftrightarrow t = 1$
$x = A \Longleftrightarrow t = 1 - A$

• fonction :
$\varphi(x) = 1 - t + t\ln t$.

• élément différentiel :
$dx = \psi'(t)dt = -1dt$.

ψ est affine donc de classe C^1 sur $[1-A, 1]$. La formule de changement de variable est licite et donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \varphi(x)dx &= \int_1^{1-A} (1 - t + t\ln t) \times (-1)dt \\
&= \int_{1-A}^1 (1 - t + t\ln t)\, dt \\
&= \int_{1-A}^1 (1-t)dt + \int_{1-A}^1 t\ln t dt \\
&= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{1-A}^1 (1-t)dt + \int_{1-A}^1 t\ln t dt \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left((1-A) - \frac{(1-A)^2}{2}\right) + \int_{1-A}^1 t\ln t dt \\
&= -\frac{1}{2} + A - \frac{(1-A)^2}{2} + \int_{1-A}^1 t\ln t dt.
\end{aligned}$$

Or, $\lim_{A\to 1^-} \left(-\frac{1}{2} + A - \frac{(1-A)^2}{2} + \int_{1-A}^1 t\ln t dt\right) = \frac{1}{2} + \int_0^1 t\ln t dt$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Donc $\lim_{A\to 1^-} \int_0^A \varphi(x)dx = \frac{1}{4}$.

On conclut que $\int_0^1 \varphi(x)dx$ converge et vaut $\frac{1}{4}$.

Partie B

6)a)Comme $x \in [0,1[$ et que $t \in [0,x]$, on a bien $t \neq 1$.
La formule sur la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique donne alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}.$$

D'où, $\dfrac{1}{1-t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{1-t^n}{1-t} = \dfrac{t^n}{1-t}$.

b)En intégrant l'égalité ci-dessus entre les bornes croissantes 0 et x, on a :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k\right) dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Puis, par linéarité :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k\right) dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \quad (*).$$

Calculons maintenant les deux premières intégrales.

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \big[-\ln(1-t)\big]_0^x = -\ln(1-x).$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k\right) dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k dt \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \quad \text{en posant } j = k+1, \text{ puis en renommant } j \text{ en } k.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans $(*)$, on conclut :

$$-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

7)• Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Pour $t \in [0,x]$, on a : $t \leq x$, puis $-t \geq -x$ et $1-t \geq 1-x > 0$.

Par passage à l'inverse, on déduit : $\forall t \in [0,x],\ 0 < \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-x}$.

En multipliant par $t^n \geq 0$, on a $\forall t \in [0, x],\ 0 < \dfrac{t^n}{1-t} \leq \dfrac{t^n}{1-x}$.
En intégrant entre les bornes croissantes 0 et x, on a :
$0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt$
avec $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$.
Donc $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \quad (*)$.
Enfin, comme $0 \leq x < 1$, on a : $x^{n+1} \leq 1$.
En multipliant par $\dfrac{1}{(n+1)(1-x)} > 0$, on déduit : $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \leq \dfrac{1}{(n+1)(1-x)}$.
En recollant avec $(*)$, on déduit :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}.$$

• Comme $x \in [0, 1[$ est fixé, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)(1-x) = +\infty$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{(n+1)(1-x)} = 0$.
D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0$.
8)L'égalité 6)b) peut se réécrire sous la forme :
$\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$.
On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.
Cela signifie que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

> Remarque
> On a : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \dfrac{x^n}{n} \leq x^n$. De plus, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ converge puisque son paramètre $x \in [0, 1[$.
> Le critère de comparaison assure alors la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$, mais ne permet pas de calculer sa somme !

9)a)$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \dfrac{n+1}{n(n+1)} - \dfrac{n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

b)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x^{k+1}}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= x\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k}}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x^{j}}{j} \\
&= x\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k}}{k} - \left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{x^{j}}{j} - \frac{x^1}{1}\right) \\
&= x\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k}}{k} - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x^{j}}{j} + \frac{x^{n+1}}{n+1} - x\right) \\
&= (x-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k}}{k} - \frac{x^{n+1}}{n+1} + x \quad \text{en renommant } j \text{ en } k.
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ d'après la question 8).

$\lim\limits_{n \to +\infty} x^{n+1} = 0$ car $0 \leq x < 1$. De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$.

Par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$.

On déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = -(x-1)\ln(1-x) + x = \varphi(x)$.

Cela signifie que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.

10)La question précédente ne peut pas être appliquée pour $x = 1$ car dans tous les calculs, on a supposé que $x < 1$.

En revanche, d'après la question 9)a), la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ peut se réécrire sous la forme $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. C'est une série télescopique.

Elle converge car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Sa somme vaut :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{par télescopage}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1\\
&= \varphi(1).
\end{aligned}$$

Exercice 2 (edhec 2020)

1)$\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ est une partie non vide de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ car $0 \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ du fait que ${}^t0 = 0 = -0$.

Pour toutes matrices U et V de $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ et tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda U + V) &= \lambda^t U +^t V \text{ par linéarité de la transposition} \\ &= \lambda(-U) + (-V) \text{ car } U \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R}) \text{ et } V \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R}) \\ &= -(\lambda U + V). \end{aligned}$$

Donc $\lambda U + V \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

On conclut que $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2)a)Soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

$$\begin{aligned} {}^tf(M) &= \ {}^t\big[({}^tA)M + MA\big] \\ &= \ {}^t(({}^tA)M) + \ {}^t(MA) \\ &= \ {}^tM^t({}^tA) + \ {}^tA^tM \text{ car } {}^t(BC) =^t C^tB \\ &= \ {}^tMA + \ {}^tA^tM \text{ car } t({}^tA) = A \\ &= (-M)A + \ {}^tA(-M) \text{ car } M \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R}) \\ &= -\big[MA + \ {}^tAM\big] \\ &= -f(M). \end{aligned}$$

Donc $f(M) \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

2)b)Pour toutes matrices U et V de $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ et tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda U + V) &= \ ({}^tA)(\lambda U + V) + (\lambda U + V)A \\ &= \lambda({}^tA)U + ({}^tA)V + \lambda UA + VA \\ &= \lambda\big[({}^tA)U + UA\big] + \ ({}^tA)V + VA \\ &= \lambda f(U) + f(V). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Par ailleurs, elle est « endo » grâce à la question 2)a). Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

3)a)Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

$M \in \mathscr{A}_3(\mathbf{R})$

$\iff {}^tM = -M$

$\iff \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & -a \\ d & = & -b \\ g & = & -c \\ b & = & -d \\ e & = & -e \\ h & = & -f \\ c & = & -g \\ f & = & -h \\ i & = & -i \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 0 \\ e & = & 0 \\ i & = & 0 \\ g & = & -c \\ d & = & -b \\ h & = & -f \end{array} \right.$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_3(\mathbf{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b,c,f) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, (b,c,f) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(J,K,L). \end{aligned}$$

Donc la famille $\mathscr{B} = (J,K,L)$ est une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbf{R})$.

3)b)Pour tous réels a, b et c, on a :

$aJ + bK + cL = 0$

$$\iff a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\iff a = b = c = 0.$

Donc la famille $\mathscr{B} = (J,K,L)$ est libre.

$\mathscr{B}$ est une famille libre et génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbf{R})$, c'est donc une base de $\mathscr{A}_3(\mathbf{R})$. Ainsi, $dim\big(\mathscr{A}_3(\mathbf{R})\big) = 3$.

$$
\begin{aligned}
4)a) f(J) &= ({}^tA)J + JA \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -J - L.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(K) &= ({}^tA)K + KA \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(L) &= ({}^tA)L + LA \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -L.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4)b) Imf &= \text{Vect}\big(f(J), f(K), f(L)\big) \text{ car } (J,K,L) \text{ est une base de } \mathscr{A}_3(\mathbf{R}) \\
&= \text{Vect}\big(-J-L, 0, -L\big) \\
&= \text{Vect}\big(-J-L, -L\big) \\
&= \text{Vect}\big(J+L, L\big) \\
&= \text{Vect}\big(J, L\big) \text{ car } J = (J+L) - L
\end{aligned}
$$

(J,L) est donc une famille génératrice de Imf. C'est aussi une famille libre car J et L ne sont pas proportionnelles. Donc (J,L) est une base de Imf.

4)c)On déduit que $dim\big(Imf\big) = 2$.

Le théorème du rang donne alors :

$dim\big(Kerf\big) = dim\big(\mathscr{A}_3(\mathbf{R})\big) - dim\big(Imf\big) = 3 - 2 = 1$.

Or, $f(K) = 0$ donc $K \in Kerf$.
(K) est une famille libre de $Kerf$ car constituée d'un seul vecteur non nul.
Son cardinal vaut 1 et coïncide avec la dimension de $Kerf$.
C'est donc une base de $Kerf$.

5)a)On a vu dans la question 4)a) que :

$f(J) = -1J + 0K - 1L$, $f(K) = 0J + 0K + 0L$ et $f(L) = 0J + 0K - 1L$.

Donc $F = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5)b)F est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, c'est-à-dire 0 et -1.

5)c)• $rg(F) = rg(f) = dimImf = 2$.

Par ailleurs, $F + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } rg(F+I) &= dimVect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= dimVect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= 2 \quad \text{car la famille est libre} \end{aligned}$$

• Le cours donne pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$dimE_\lambda(F) + rg(F - \lambda I) = 3 \quad (*)$$

On déduit :

$dimE_0(F) = 3 - rg(F) = 1$ et $dimE_{-1}(F) = 3 - rg(F + I) = 1$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de F vaut 2.
Or, $F \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Donc F n'est pas diagonalisable, d'après le théorème de réduction.

Remarque
On pouvait aussi calculer $E_0(F)$ et $E_{-1}(F)$, mais l'égalité $(*)$ permet d'aller plus vite.

Exercice 3 (ecricome 2006)

$$1) \lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2}e^{-x^2/2}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(t^{1/2}\right)^{n+2} e^{-t/2} \quad \text{en posant } t = x^2 \text{ ou } x = t^{1/2}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$= 0 \quad \text{par croissances comparées.}$$

Donc $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge car c'est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ dont le paramètre vaut $2 > 1$.

D'après le critère de négligeabilité (pour des fonctions positives), $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)dx$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ converge car ce n'est pas une intégrale impropre du fait que f_n est continue sur $[0,1]$.

D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ converge.

3)a)Soit $A \geq 0$.

Faisons une IPP sur $\displaystyle\int_0^A f_{n+2}(x)dx = \int_0^A x^{n+2}exp\big(-x^2/2\big)dx$ en posant :

$u(x) = x^{n+1} \qquad v'(x) = xexp\big(-x^2/2\big)$

$u'(x) = (n+1)x^n \qquad v(x) = -exp\big(-x^2/2\big)$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,A]$. L'IPP est valide et donne :

$$\int_0^A x^{n+2}exp\big(-x^2/2\big)dx = \big[-x^{n+1}exp\big(-x^2/2\big)\big]_0^A - \int_0^A -(n+1)x^n exp\big(-x^2/2\big)dx$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^A f_{n+2}(x)dx = -A^{n+1}exp\big(-A^2/2\big) - (n+1)\int_0^A f_n(x)dx \quad (*)$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A^{n+1}exp\big(-A^2/2\big) = 0$ en reprenant la technique de la question 1).

En passant à la limite dans $(*)$ quand $A \to +\infty$, on déduit alors :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+2}(x)dx = (n+1)\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$, soit $I_{n+2} = (n+1)I_n$.

b)$I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(x)dx = \int_0^{+\infty} exp\big(-x^2/2\big)dx$.

Notons $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\big(-x^2/2\big)$ la densité de la loi $\mathscr{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned}
\text{On a alors : } I_0 &= \int_0^{+\infty} \sqrt{2\pi}\varphi(x)dx \\
&= \sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx \\
&= \sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx \quad \text{car } \varphi \text{ est paire} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times 1 \quad \text{car } \varphi \text{ est une densité} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} I_1 &= \int_0^{+\infty} xexp\big(-x^2/2\big)dx \\
&= \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} xexp\big(-x^2/2\big)dx \\
&= \lim_{A\to+\infty} \big[-exp\big(-x^2/2\big)\big]_0^A \\
&= \lim_{A\to+\infty} \big[-exp\big(-A^2/2\big)+1\big] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

d)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}$ et $I_{2n+1} = 2^n n!$ »

On a prouvé que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et que $I_1 = 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

La question 3)a) avec $n \to 2n$ donne :

$$\begin{aligned}
I_{2n+2} &= (2n+1)I_{2n} \\
&= (2n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \quad \text{par HR} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n+1)!}{2^n n!} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n+1)!(2n+2)}{2^n n!(2n+2)} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} \quad \text{en écrivant } 2n+2 = 2(n+1)
\end{aligned}$$

Puis, la question 3)a) avec $n \to 2n+1$ donne :

$$\begin{aligned}I_{2n+3} &= (2n+2)I_{2n+1}\\ &= (2n+2)2^n n! \quad \text{par HR}\\ &= 2(n+1)2^n n!\\ &= 2^{n+1}(n+1)!\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4)a)• f est nulle sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$ puisqu'elle coïncide avec $x \mapsto xexp(-x^2/2)$.

• f est continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction nulle, puis continue sur $[0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues.
Ainsi, f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge et vaut 0 car f est nulle sur $]-\infty, 0[$.

De plus, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} f_1(x)dx$ converge et vaut I_1, qu'on a calculée et qui vaut 1.

D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1.$

On conclut que f est une densité de probabilité.

b)i. X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx$ converge.

Comme $x \mapsto xf(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, cela se ramène à la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xf_1(x)dx = \int_{0}^{+\infty} f_2(x)dx.$

Or, cette intégrale est I_2 qui converge. Donc X admet une espérance.

$$\begin{aligned}\text{De plus, } E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} xf_1(x)dx\\ &= 0 + I_2\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{en utilisant 3)d) avec } n = 1.\end{aligned}$$

ii. X^2 admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 f(x)|dx$ converge.

Comme $x \mapsto x^2 f(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, cela se ramène à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f_1(x)dx = \int_0^{+\infty} f_3(x)dx$.

Or, cette intégrale est I_3 qui converge. Donc X^2 admet une espérance.

$$\begin{aligned}
\text{De plus, } E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \quad \text{d'après le thm de transfert}\\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{+\infty} f_3(x)dx\\
&= 0 + I_3\\
&= 2 \quad \text{en utilisant 3)d) avec } n = 1.
\end{aligned}$$

Comme X^2 admet une espérance, X admet une variance donnée par la formule de Koënig :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

5)a)$\forall x \in \mathbf{R},\ G(x) = P(Y \le x) = P(X^2 \le x)$.

Distinguons deux cas :

• $x < 0$

Comme X^2 ne prend que des valeurs positives, l'événement $(X^2 \le x)$ est impossible. Donc $G(x) = 0$.

• $x \ge 0$

$$\begin{aligned}
G(x) &= P\left(\sqrt{X^2} \le \sqrt{x}\right) \quad \text{par croissance de la racine carrée}\\
&= P\left(|X| \le \sqrt{x}\right)\\
&= P\left(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}\right)\\
&= F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right) \quad \text{car } X \text{ est à densité}
\end{aligned}$$

b)Le calcul de G obtenu ci-dessus pour $x \ge 0$ peut être simplifié.

En effet, $\forall x \ge 0,\ F\left(-\sqrt{x}\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-\sqrt{x}} f(t)dt = 0$ car f est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc sur $]-\infty, -\sqrt{x}]$.

$$\begin{aligned}
\text{De plus, } \forall x \ge 0,\ F\left(\sqrt{x}\right) &= \int_{-\infty}^{\sqrt{x}} f(t)dt\\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^{\sqrt{x}} texp\big(-t^2/2\big)dt\\
&= 0 + \left[-exp\big(-t^2/2\big)\right]_0^{\sqrt{x}}\\
&= 1 - exp(-x/2).
\end{aligned}$$

Finalement, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - exp(-x/2) & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $1/2$.

Donc $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1/2)$.

Le cours donne : $E(Y) = \dfrac{1}{1/2} = 2$ et $V(Y) = \dfrac{1}{(1/2)^2} = 4$.