Exercice 1 (eml 2012)

Partie I :

1)λ est valeur propre de B

$\iff B-\lambda I$ n'est pas inversible

$\iff det(B-\lambda I)=0$

$\iff (2-\lambda)(3-\lambda)-2\times 1=0$

$\iff \lambda^2-5\lambda+4=0.$

$\iff \lambda=1$ ou $\lambda=4.$

Donc $sp(B)=\{1,4\}$.

$E_1(B)=\{U\in\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})\mid (B-I)U=0\}$. Posons $U=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$.

$(B-I)U=0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix} \iff x+2y=0$

$\iff x=-2y.$

Donc $E_1(B)=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\mid x=-2y\right\}=\left\{\begin{pmatrix} -2y\\ y\end{pmatrix}, y\in\mathbf{R}\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2\\ 1\end{pmatrix}\right).$

$E_4(B)=\{U\in\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})\mid (B-4I)U=0\}$. Posons $U=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$.

$(B-4I)U=0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x+2y=0\\ x-\ \ y=0\end{cases}$

$\iff x=y.$

Donc $E_4(B)=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\mid x=y\right\}=\left\{\begin{pmatrix} y\\ y\end{pmatrix}, y\in\mathbf{R}\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}\right).$

$B\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ admet deux valeurs propres différentes.
Donc B est diagonalisable.

2)B est diagonalisable. On peut donc l'écrire sous la forme $B=PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible dont les colonnes sont formées d'une base de vecteurs propres de B et D une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de B.

On prend $P=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

✓ On a pris $\left(\begin{pmatrix} 1\\ -1/2\end{pmatrix}\right)$ comme base pour $E_1(B)$, ce qui est légitime car $\begin{pmatrix} 1\\ -1/2\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} -2\\ 1\end{pmatrix}$.

3)$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$ et $5D - 4I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Donc $D^2 = 5D - 4I$.

On déduit :

$$\begin{aligned} B^2 &= \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) \\ &= PD^2P^{-1} \\ &= P(5D-4I)P^{-1} \\ &= 5PDP^{-1} - 4PIP^{-1} \\ &= 5B - 4I. \end{aligned}$$

4)L'égalité précédente donne :

$B^2 - 5B = -4I$, puis $B(B-5I) = -4I$ et $B\left(-\dfrac{1}{4}(B-5I)\right) = I$.

Donc B est inversible et $B^{-1} = -\dfrac{1}{4}(B-5I)$.

Partie II :

1)Pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} h(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N)B \\ &= (\lambda AM + AN)B \\ &= \lambda AMB + ANB \\ &= \lambda h(M) + h(N). \end{aligned}$$

De plus, $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et $B \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ donc $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), h(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Donc h est « endo ».

Ainsi, h est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2)Soit $N \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ quelconque.

$$\begin{aligned} h(M) = N &\iff AMB = N \\ &\iff A^{-1}AMBB^{-1} = A^{-1}NB^{-1} \\ &\iff M = A^{-1}NB^{-1}. \end{aligned}$$

Les équivalences ci-dessus prouvent que toute matrice $N \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ admet un unique antécédent par h.

Donc h est bijective et son application réciproque est :

$$\begin{aligned} h^{-1} : \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) &\to \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \\ N &\mapsto A^{-1}NB^{-1} \end{aligned}$$

✓ A est inversible car diagonale sans zéros sur la diagonale.
Quant à B, elle l'est par la question I.4)

3)a)$h(M)=\lambda M \iff AMB=\lambda M$
$$\begin{aligned}
&\iff AMPDP^{-1}=\lambda M\\
&\iff ANDP^{-1}=\lambda M \text{ car } MP=N\\
&\iff ANDP^{-1}P=\lambda MP\\
&\iff AND=\lambda N.
\end{aligned}$$

3)b)Soit $N=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et $\lambda\in\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
AND=\lambda N &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x & y \\ -z & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x & 4y \\ -z & -4t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \lambda x \\ 4y & = & \lambda y \\ -z & = & \lambda z \\ -4t & = & \lambda t \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} (1-\lambda)x & = & 0 \\ (4-\lambda)y & = & 0 \\ (-1-\lambda)z & = & 0 \\ (-4-\lambda)t & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Distinguons plusieurs cas :

• $\lambda\notin\{-4,-1,1,4\}$
$(0,0,0,0)$ est alors l'unique solution du système et N est donc nulle.

• $\lambda=-4$
les solutions du système sont les quadruplets $(0,0,0,t)$ où $t\in\mathbf{R}$.

• $\lambda=-1$
les solutions du système sont les quadruplets $(0,0,z,0)$ où $z\in\mathbf{R}$.

• $\lambda=1$
les solutions du système sont les quadruplets $(x,0,0,0)$ où $x\in\mathbf{R}$.

• $\lambda=4$
les solutions du système sont les quadruplets $(0,y,0,0)$ où $y\in\mathbf{R}$.

Conclusion :
Posons $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=1$ et $\lambda_4=4$.
Posons $N_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Les équivalences précédentes donnent alors : $\forall i\in[[1,4]],\ AN_iD=\lambda_iN_i$.

3)c)Pour tous réels α_1, α_2, α_3 et α_4, on a :

$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 = 0$

$\Longleftrightarrow \alpha_1 N_1 P^{-1} + \alpha_2 N_2 P^{-1} + \alpha_3 N_3 P^{-1} + \alpha_4 N_4 P^{-1} = 0$

$\Longleftrightarrow \left(\alpha_1 N_1 P^{-1} + \alpha_2 N_2 P^{-1} + \alpha_3 N_3 P^{-1} + \alpha_4 N_4 P^{-1}\right) P = 0P$

$\Longleftrightarrow \alpha_1 N_1 P^{-1} P + \alpha_2 N_2 P^{-1} P + \alpha_3 N_3 P^{-1} P + \alpha_4 N_4 P^{-1} P = 0$

$\Longleftrightarrow \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \alpha_3 N_3 + \alpha_4 N_4 = 0.$

La famille (N_1, N_2, N_3, N_4) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ car elle est construite à partir de la base canonique en changeant l'ordre des vecteurs. Elle est donc libre.

On déduit que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, ce qui prouve que la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est libre.

C'est une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Son cardinal fait 4 et coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

d)La question 3)a) donne :

$h(M_1) = -4M_1$, $h(M_2) = -1M_2$, $h(M_3) = 1M_3$ et $h(M_4) = 4M_4$.

Donc $H = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(h) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3)e)$\mathscr{M}_{\mathscr{C}}\big((h-e) \circ (h+e) \circ (h-4e) \circ (h+4e)\big)$

$= (H - I)(H + I)(H - 4I)(H + 4I)$

$= (H^2 - I)(H^2 - 16I)$

$= \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $(h-e) \circ (h+e) \circ (h-4e) \circ (h+4e) = 0$.

Exercice 2 (eml 2012)

Partie I :

1)f est continue sur $]0,+\infty[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec le produit de deux fonctions continues.

De plus, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ par croissances comparées.

Comme $f(0) = 0$ on a donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = f(0)$, ce qui prouve la continuité à droite de f en 0.

On conclut que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2)f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec le produit de deux fonctions de classe C^1.

$\forall t > 0,\ f'(t) = 1 \times \ln t + t \times \dfrac{1}{t} = \ln t + 1.$

3)$f'(t) \geq 0 \iff \ln t + 1 \geq 0 \iff \ln t \geq -1 \iff t \geq e^{-1}$.

D'où le tableau de variations de f :

t	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{t\to+\infty} t = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$, par produit, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.

4)f' est dérivable sur sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables et $\forall t > 0,\ f''(t) = \dfrac{1}{t} > 0$.

Donc f est convexe sur $]0,+\infty[$.

5)a)$\forall t > 0,\ \dfrac{f(t) - f(0)}{t} = \dfrac{t\ln t - 0}{t} = \ln t.$

Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t) - f(0)}{t} = -\infty.$

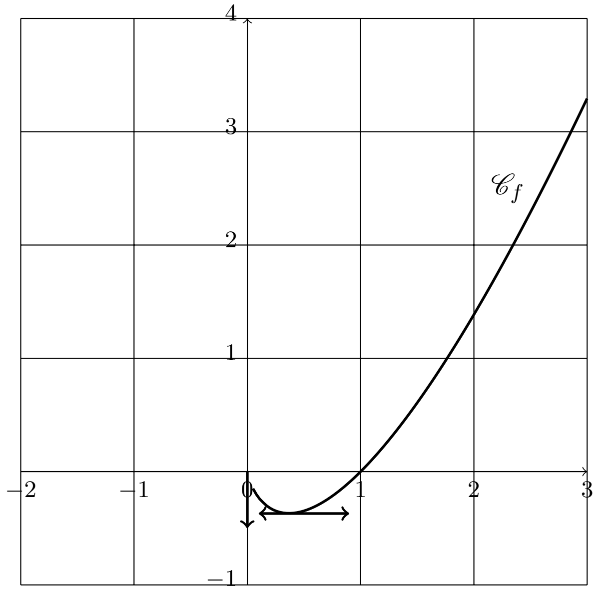
f n'est donc pas dérivable (à droite) en 0, sa courbe représentative Γ possède une demi-tangente verticale en 0.

5)b)$\forall t > 0,\ f(t) = 0 \iff t\ln t = 0 \iff \ln t = 0 \iff t = 1.$

Par ailleurs, $f(0) = 0$.

Les points d'intersection demandés sont donc $(1,0)$ et $(0,0)$.

5)c)



Partie II :

1)Pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, on a :
$\partial_1 F(x,y) = \dfrac{1}{xy} - \dfrac{\ln y}{x^2}$ et $\partial_2 F(x,y) = -\dfrac{\ln x}{y^2} + \dfrac{1}{xy}$.

2)$\partial_1 F(e,e) = \dfrac{1}{e^2} - \dfrac{\ln e}{e^2} = 0$ car $\ln e = 1$,
$\partial_2 F(e,e) = -\dfrac{\ln e}{e^2} + \dfrac{1}{e^2} = 0$.
Donc (e,e) est un point critique de F.

3)$\partial^2_{1,1} F(x,y) = \partial_1 \left(\partial_1 F(x,y)\right) = \partial_1 \left(\dfrac{1}{xy} - \dfrac{\ln y}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2 y} + \dfrac{2\ln y}{x^3}$,
$\partial^2_{1,2} F(x,y) = \partial_1 \left(\partial_2 F(x,y)\right) = \partial_1 \left(-\dfrac{\ln x}{y^2} + \dfrac{1}{xy}\right) = -\dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{1}{x^2 y}$,
$\partial^2_{2,1} F(x,y) = \partial^2_{1,2} F(x,y)$ par le théorème de Schwarz, f étant de classe C^2,
$\partial^2_{2,2} F(x,y) = \partial_2 \left(\partial_2 F(x,y)\right) = \partial_2 \left(-\dfrac{\ln x}{y^2} + \dfrac{1}{xy}\right) = \dfrac{2\ln x}{y^3} - \dfrac{1}{xy^2}$.
La matrice hessienne de F au point (e,e) vaut :
$\nabla^2 F(e,e) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} F(e,e) & \partial^2_{1,2} F(e,e) \\ \partial^2_{2,1} F(e,e) & \partial^2_{2,2} F(e,e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/e^3 & -2/e^3 \\ -2/e^3 & 1/e^3 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de $\nabla^2 F(e,e)$
$\iff \nabla^2 F(e,e) - \lambda I$ n'est pas inversible
$\iff det\left(\nabla^2 F(e,e) - \lambda I\right) = 0$
$\iff \left(\lambda - \frac{1}{e^3}\right)\left(\lambda - \frac{1}{e^3}\right) - \left(-\frac{2}{e^3}\right)\left(-\frac{2}{e^3}\right) = 0$
$\iff \left(\lambda - \frac{1}{e^3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{e^3}\right)^2$
$\iff \lambda - \frac{1}{e^3} = -\frac{2}{e^3}$ ou $\lambda - \frac{1}{e^3} = \frac{2}{e^3}$
$\iff \lambda = -\frac{1}{e^3}$ ou $\lambda = \frac{3}{e^3}$.

Les valeurs propres de $\nabla^2 F(e,e)$ sont sont nulles et de signes contraires. Donc F n'admet pas d'extrémum local en (e,e), c'est un point selle.

Exercice 3 (eml 2012)

1)$x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

En effet, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n+2}{2}}e^{-\frac{t}{2a^2}}$ (en posant $t = x^2$ ou $x = t^{1/2}$)

$= 0$ par croissances comparées.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$).

D'après le critère de négligeabilité sur les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx$ converge.

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx$ converge car $x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ est continue sur $[0, 1]$.

Par Chasles, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx$ est convergente.

2)a)Une densité d'une variable aléatoire Z qui suit la loi $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$ est : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$.

On a ici $m = E(Z) = 0$ et $\sigma = a$, ce qui donne : $f(x) = \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ ou encore $f(x) = \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx \\
&= \int_0^{+\infty} a\sqrt{2\pi}f(x)dx \\
&= a\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty} f(x)dx \\
&= a\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ car } f \text{ est paire} \\
&= a\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2} \times 1 \text{ car } f \text{ est une densité} \\
&= a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

2)b)φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme composée de fonctions dérivables et

$\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi'(x) = -\dfrac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx \\
&= \int_0^{+\infty} -a^2\varphi'(x)dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t -a^2\varphi'(x)dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[-a^2\varphi(x)\right]_0^t \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left(-a^2\varphi(t) + a^2\varphi(0)\right) \\
&= a^2.
\end{aligned}
$$

En effet, $\varphi(0) = 1$. De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{t^2}{2a^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$ donnent par composition : $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.

3)a)Soit $n \geq 2$, un entier et $t \geq 0$ un réel.

Effectuons une intégration par parties dans $\displaystyle\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx$ en posant :

$$
\begin{array}{ll}
u(x) = x^{n-1} & v'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2a^2}} = -a^2\varphi'(x) \\
u'(x) = (n-1)x^{n-2} & v(x) = -a^2\varphi(x).
\end{array}
$$

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ donc sur $[0, t]$, l'intégration par parties est donc licite et donne :

$$
\begin{aligned}
\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx &= \left[-a^2x^{n-1}\varphi(x)\right]_0^t - \int_0^t -a^2\varphi(x)(n-1)x^{n-2}dx \\
&= -a^2t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx
\end{aligned}.
$$

3)b) $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2a^2}} = 0$ par croissances comparées (par la même technique que la question 1).

En passant à la limite dans l'égalité 3)a), on déduit :

$\lim\limits_{t\to+\infty} \displaystyle\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx = \lim\limits_{t\to+\infty} (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx$, c'est-à-dire :

$$I_n = (n-1)a^2 I_{n-2}.$$

3)c)L'égalité précédente pour $n = 2$ et $n = 3$ donne :

$I_2 = a^2I_0 = a^2 \times a\sqrt{\frac{\pi}{2}} = a^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $I_3 = 2a^2I_1 = 2a^2 \times a^2 = 2a^4$.

4)• $\forall x \in \mathbf{R},\ g_a(x) \geq 0$.

• g_a est continue sur $]-\infty, 0]$ (fonction nulle) et continue sur $]0, +\infty[$ comme produit et composéee de fonctions continues.

Donc g_a est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g_a(x)dx$ converge et vaut 0 car g_a est nulle sur $]-\infty,0]$.
$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g_a(x)dx$ converge car de même nature que l'intégrale convergente I_1 et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g_a(x)dx = \frac{1}{a^2}I_1 = \frac{1}{a^2}\times a^2 = 1$.
Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)dx$ converge.
De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)dx = \int_{-\infty}^{0} g_a(x)dx + \int_{0}^{+\infty} g_a(x)dx = 0+1=1$.

On conclut que g_a est une densité.

5)La fonction de répartition G_a de X est donnée par :

$$\forall x\in\mathbf{R},\ G_a(x) = \int_{-\infty}^{x} g_a(t)dt.$$

On distingue deux cas :
• premier cas : $x<0$
g_a est nulle sur $]-\infty,0]$ donc sur $]-\infty,x]$. Donc $G_a(x)=0$.
• second cas : $x\geq 0$

$$\begin{aligned}
G_a(x) &= \int_{-\infty}^{0} g_a(t)dt + \int_{0}^{+\infty} g_a(t)dt\\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}dt\\
&= 0+\int_{0}^{x} -\varphi'(t)dt\\
&= \big[-\varphi(t)\big]_0^x\\
&= -\varphi(x)+\varphi(0)\\
&= 1-e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $G_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$

6)X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg_a(x)dx$ est absolument convergente.
$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \big|xg_a(x)\big|dx$ converge et vaut 0 car g_a est nulle sur $]-\infty,0]$.
$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \big|xg_a(x)\big|dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx$ converge car de même nature que I_2.

Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|xg_a(x)\right| dx$ converge.

Donc X admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg_a(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} xg_a(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xg_a(x)dx \\
&= 0 + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \\
&= \frac{1}{a^2} \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \\
&= \frac{1}{a^2} \times I_2 \\
&= \frac{1}{a^2} \times a^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
&= a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

7)X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_a(x)dx$ converge.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 g_a(x)dx$ converge et vaut 0 car g_a est nulle sur $]-\infty, 0]$.

De plus, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 g_a(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^3}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ converge car de même nature que I_3.

Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_a(x)dx$ converge.

Donc X admet une moment d'ordre 2 donné par :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_a(x)dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{x^3}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \\
&= \frac{1}{a^2} \int_{0}^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \\
&= \frac{1}{a^2} \times I_3 \\
&= \frac{1}{a^2} \times 2a^4 \\
&= 2a^2.
\end{aligned}$$

La formule de Koënig donne enfin :

$V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2 = 2a^2 - \left(a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)^2 = 2a^2 - a^2\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(4-\pi)a^2}{2}.$

8)a)$U \hookrightarrow \mathscr{U}\big(]0,1]\big)$, sa fonction de répartition F_U est donnée par :

$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbf{R},\ F_Z(x) = P(Z \leq x) = P\big(a\sqrt{-2\ln U} \leq x\big).$

On distingue deux cas :

• premier cas : $x < 0$

Comme $a\sqrt{-2\ln U} \geq 0$, l'événement $\big(a\sqrt{-2\ln U} \leq x\big)$ est impossible. Donc $F_Z(x) = 0$.

• deuxième cas : $x \geq 0$

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P\left(\sqrt{-2\ln U} \leq \frac{x}{a}\right) \\ &= P\left(-2\ln U \leq \frac{x^2}{a^2}\right) \\ &= P\left(\ln U \geq \frac{x^2}{-2a^2}\right) \\ &= P\left(U \geq e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) \text{ par croissance de l'exponentielle} \\ &= 1 - P\left(U < e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) \\ &= 1 - P\left(U \leq e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) \text{ car } U \text{ est à densité} \\ &= 1 - F_U\left(e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) \\ &= 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{ car } e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \in \,]0,1]\,. \end{aligned}$$

On conclut que $F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$

On constate que X et Z ont la même fonction de répartition, elles suivent donc la même loi.

8)b)programme :

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
a=float(input("entrer un réel a>0"))
U=rd.random()
Z=a*np.sqrt(-2*np.log(U))
print(Z)
```

9)a)A_n est une variable aléatoire fonction de X_1, ...X_n qui ne dépend pas de a, où $(X_1, ..., X_n)$ est un n-échantillon de X.
Donc A_n est un estimateur a.

$$\begin{aligned}
E(A_n) = E&\left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\big(X_1 + \cdots + X_n\big)\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\big(E(X_1) + \cdots + E(X_n)\big) \text{ par linéarité de l'espérance}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\big(E(X) + \cdots + E(X)\big) \text{ car } X_k \text{ a même loi que } X\\
&= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \times nE(X)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \times na\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\
&= a.
\end{aligned}$$

Donc A_n est un estimateur sans biais de a.

$$\begin{aligned}
9)b)V(A_n) = V&\left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\big(X_1 + \cdots + X_n\big)\right)\\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\right)^2 V\left(X_1 + \cdots + X_n\right)\\
&= \frac{2}{n^2\pi}\big(V(X_1) + \cdots + V(X_n)\big) \text{ car } X_1, ..., X_n \text{ sont indépendantes}\\
&= \frac{2}{n^2\pi}\big(V(X) + \cdots + V(X)\big) \text{ car } X_k \text{ a même loi que } X\\
&= \frac{2}{n^2\pi} \times nV(X)\\
&= \frac{2}{n^2\pi} \times n\frac{(4-\pi)a^2}{2}.\\
&= \frac{(4-\pi)a^2}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Comme A_n est sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance.

10)a)Pour tout réel $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
P(M_n > t) &= P(X_1 > t \cap ... \cap X_n > t) \\
&= P(X_1 > t) \cdots P(X_n > t) \text{ car } X_1, ..., X_n \text{ sont indépendantes} \\
&= P(X > t)^n \text{ car } X_k \text{ a même loi que } X \\
&= (1 - P(X \leq t)^n \\
&= (1 - G_a(t))^n \\
&= \left(1 - (1 - e^{-\frac{t^2}{2a^2}})\right)^n \text{ car } t \geq 0 \\
&= e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}.
\end{aligned}$$

10)b)La fonction de répartition F_{M_n} de M_n est définie par

$$\forall t \in \mathbf{R},\ F_{M_n}(t) = P(M_n \leq t).$$

On distingue deux cas :

• premier cas : $t < 0$

$$\begin{aligned}
P(M_n > t) &= (1 - G_a(t))^n \text{ en reprenant le calcul fait en 10)a)} \\
&= (1 - 0)^n \text{ car } t < 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

D'où $P(M_n \leq t) = 1 - P(M_n > t) = 0$.

• deuxième cas : $t \geq 0$

La question 10)a) donne : $P(M_n \leq t) = 1 - P(M_n > t) = 1 - e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$.

On conclut que $F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{nt^2}{2a^2}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

10)c)D'après la question 5), pour tout réel $b > 0$, on a :

$G_b(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t^2}{2b^2}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

Posons $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$. On a alors : $\forall t \in \mathbf{R},\ F_{M_n}(t) = G_b(t)$.

F_{M_n} a donc les mêmes propriétés que G_b, elle est donc continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0.

M_n est donc une variable aléatoire à densité et une densité de M_n est g_b.

10)d)En reprenant le calcul fait aux questions 6) et 7) avec $a \to \dfrac{a}{\sqrt{n}}$, on obtient :

$E(M_n) = \dfrac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$,

$$V(M_n) = \frac{(4-\pi)\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^2}{2} = \frac{4-\pi}{2n}a^2.$$

11)a)$B_n = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}M_n$ est un estimateur sans biais de a.

En effet , $E(B_n) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}E(M_n) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \times a\sqrt{\frac{\pi}{2n}} = a.$

11)b)
$$\begin{aligned} V(B_n) &= V\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}M_n\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\right)^2 V(M_n) \\ &= \frac{2n}{\pi} \times \frac{4-\pi}{2n}a^2 \\ &= \frac{4-\pi}{\pi}a^2. \end{aligned}$$

Comme B_n est sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance.