
Exercice 1 (edhec 2023)

1) Pour tous $(i, j) \in \llbracket 0, 4 \rrbracket^2$, le coefficient a_{ij} de A correspond au nombre d'arêtes entre le sommet $\boxed{i}$ et le sommet $\boxed{j}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On prend bien garde de numérotter les lignes et les colonnes de A à partir de l'indice zéro. On vérifie que A est symétrique.

2)a) Les chaînes de longueur 3 reliant les sommets $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ sont :

$\boxed{2}-\boxed{1}-\boxed{2}-\boxed{3}$, $\boxed{2}-\boxed{1}-\boxed{0}-\boxed{3}$, $\boxed{2}-\boxed{3}-\boxed{0}-\boxed{3}$, $\boxed{2}-\boxed{3}-\boxed{2}-\boxed{3}$ et $\boxed{2}-\boxed{3}-\boxed{4}-\boxed{3}$.

Il y en a 5.

b) La fonction f ci-dessous prend comme paramètres une matrice M et un entier k , et renvoie M^k .

La matrice B est donc égale à A^3 .

n correspond au coefficient $(2,3)$ de la matrice A^3 donc au nombre de chaînes de longueur 3 reliant les sommets $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$.

```
def f(M,k):  
    N=al.matrix_power(M,k)  
    return N  
B=f(A,3)  
n=B[2,3]  
print(n)
```

3)a) Le degré du sommet $\boxed{i}$ est égal au nombre d'arêtes reliées à ce sommet. On peut compter ces arêtes « à la main » ou constater que c'est la somme des coefficients de la i -ème ligne de A .

Les degrés respectifs de $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$ sont 2, 2, 2, 3 et 1.

$$\text{Donc } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } L = D - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) L est symétrique donc diagonalisable.

4)a) $X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R})$ donc ${}^tX \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbf{R})$.

De plus, $LX \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R})$.

Par produit, ${}^tX LX \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{R})$, c'est donc un réel.

$$\text{b) } {}^tX = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix} \text{ et } LX = \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix}.$$

Par produit, on a :

$$\begin{aligned} {}^tX LX &= a(2a - b - d) + b(-a + 2b - c) + c(-b + 2c - d) + d(-a - c + 3d - e) + e(-d + e) \\ &= 2a^2 - ab - ad - ab + 2b^2 - bc - bc + 2c^2 - cd - ad - cd + 3d^2 - de - de + e^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + e^2 - 2ab - 2ad - 2bc - 2cd - 2de. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} &(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 + (e - d)^2 \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2) + (d^2 - 2ad + a^2) + (e^2 - 2de + d^2) \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + e^2 - 2ab - 2ad - 2bc - 2cd - 2de. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } {}^tX LX = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 + (e - d)^2.$$

c) • X est un vecteur propre de L associé à λ donc $LX = \lambda X$, ce qui donne :

$$LX = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \\ \lambda e \end{pmatrix}.$$

Puis, ${}^tX = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix}$, ce qui donne par produit :

$${}^tX LX = \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2).$$

• D'après la question 4)b), ${}^tX LX$ est une somme de carrés donc ${}^tX LX \geq 0$.

On a donc $\lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq 0$.

Comme X est un vecteur propre, l'une au moins de ses composantes est non nulle. Donc $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 > 0$, ce qui mène à $\lambda \geq 0$.

Ainsi, les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

$$\text{d) Par produit, on trouve } LU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

U est non nul et tel que $LU = 0$. Donc U est un vecteur propre de L associé à la valeur propre 0.

Comme les valeurs propres de U sont positives ou nulles et que 0 est valeur propre de U , c'est donc que 0 est la plus petite des valeurs propres de U .

Ainsi, $\lambda_1 = 0$.

5)a) Cela revient à chercher le sous-espace propre de L associé à 0.

$$\begin{aligned}
 LX = 0 &\iff \begin{cases} 2a - b - d &= 0 \\ -a + 2b - c &= 0 \\ -b + 2c - d &= 0 \\ -a - c + 3d - e &= 0 \\ -d + e &= 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2a - b &= e & L_1 \\ -a + 2b - c &= 0 & L_2 \\ -b + 2c &= e & L_3 \\ -a - c &= -2e & L_4 \\ d &= e & L_5 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2a - b &= e & L_1 \\ -a + 2b - c &= 0 & L_2 \\ -b + 2c &= e & L_3 \\ 2b &= 2e & L_4 \leftarrow L_2 - L_4 \\ d &= e & L_5 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a &= e \\ c &= e \\ b &= e \\ d &= e \end{cases} \\
 &\iff \exists e \in \mathbf{R} \mid X = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix}. \\
 &\iff \exists e \in \mathbf{R} \mid X = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
 &\iff X \in \text{Vect}(U).
 \end{aligned}$$

b) La question précédente montre que $E_0(L) = \text{Vect}(U)$.

(U) est donc une famille génératrice de $E_0(L)$, elle est constituée d'un seul vecteur non nul, elle est donc libre.

Donc (U) est une base de $E_0(L)$ et $\dim E_0(L) = 1$.

Comme L est diagonalisable, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 5, d'après le théorème de réduction.

Du fait que la dimension de $E_0(L)$ vaut 1, il y a donc obligatoirement d'autres valeurs propres que 0.

Etant positives ou nulles et non nulles, celles-ci sont donc strictement positives.

Remarque

Je ne comprends pas la formulation de la question.

En effet, rien n'empêche que L ait par exemple 4 valeurs propres distinctes ordonnées ainsi : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5$.

Exercice 2 (edhec 2010)

1) $u_0 = 2$, $u_1 = 2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$ et $u_2 = 2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$.

2)a) L'inégalité demandée est vraie pour $n = 0$ puisque $u_0 = 2$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = 2 \times \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

Or, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $1 + \frac{1}{2^k} \geq 1$.

Par produit, $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geq 1^n = 1$. D'où, $u_n \geq 2$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 2$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

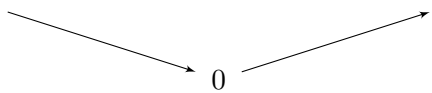
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1 \text{ et } u_n > 0 \text{ donc } u_{n+1} \geq u_n.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

c) On étudie sur $] -1, +\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$.

f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ comme différence et composée de fonctions dérivables.

$\forall x > -1$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. Donc $f'(x)$ est du signe de x .

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$\begin{matrix} \vdots \\ - \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}$	+
$f(x)$			

A la lecture du tableau, on a : $\forall x > -1$, $f(x) \geq 0$.

Donc $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Remarque

On pouvait aussi utiliser que $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave donc au-dessous de ses tangentes, au-dessous en particulier de sa tangente en 0 dont l'équation est $y =$.

d) Par propriété du logarithme, on a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

L'inégalité 2)c) utilisée pour $x \rightarrow \frac{1}{2^k}$ donne : $\forall k \in \mathbf{N}, \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$.

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à n , on a :

$$\sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}, \text{ c'est-à-dire : } \ln(u_n) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

$$\text{Enfin, } \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2.$$

En recollant les inégalités : $\forall n \in \mathbf{N}, \ln(u_n) \leq 2$.

3) En appliquant l'exponentielle (croissante), on a : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq e^2$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone.

De plus, $(u_n)_{n \geq 0}$ étant croissante, on a : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq u_0$, soit $u_n \geq 2$.

On a donc $\forall n \in \mathbf{N}, 2 \leq u_n \leq e^2$, puis par passage à la limite : $2 \leq l \leq e^2$.

4)a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l > 0$ et la fonction logarithme est continue en l .

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ln(l)$.

Comme $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \ln(l)$.

Cela signifie que la série $\sum_{k \geq 0} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ converge et que sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ vaut $\ln(l)$.

$$\text{Ainsi, } \ln(l) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{l}{u_n}\right) &= \ln(l) - \ln(u_n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right). \end{aligned}$$

c) L'inégalité 2)c) utilisée pour $x \rightarrow \frac{1}{2^k}$ donne : $\forall k \in \mathbf{N}, \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$.

En sommant ces inégalités pour k allant de $n+1$ à $+\infty$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}, \text{ c'est-à-dire : } \ln\left(\frac{l}{u_n}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Or, } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+n+1}} \quad \text{en posant } j = k - n - 1 \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \times 2 \\
&= \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

On recolle les inégalités et on obtient : $\ln\left(\frac{l}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

Enfin, $\ln\left(\frac{l}{u_n}\right) \geq 0$ puisque $\forall k \in \mathbf{N}, \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geq 0$.

Finalement, $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{l}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

d) En appliquant la fonction exponentielle membre à membre et par croissance de cette dernière, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$1 \leq \frac{l}{u_n} \leq e^{\frac{1}{2^n}}$$

Par croissance de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$:

$$-1 \leq -\frac{u_n}{l} \leq -e^{-\frac{1}{2^n}}$$

On multiplie membre à membre par $l > 0$:

$$-l \leq -u_n \leq -le^{-\frac{1}{2^n}}$$

Enfin, en ajoutant l membre à membre et en factorisant le membre de droite, on a :

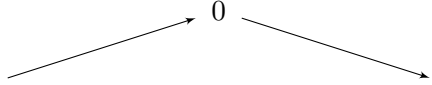
$$\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq l - u_n \leq l\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right).$$

e) • On étudie sur $\mathbf{R}$ la fonction $g : x \mapsto 1 - e^{-x} - x$.

g est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbf{R}, g'(x) = e^{-x} - 1.$$

$$g'(x) \geq 0 \iff e^{-x} - 1 \geq 0 \iff e^{-x} \geq 1 \iff -x \geq 0 \iff x \leq 0.$$

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$			

Le tableau donne $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) \leq 0$. Donc $\forall x \in \mathbf{R}, 1 - e^{-x} \leq x$.

• En appliquant cette inégalité pour $x \rightarrow \frac{1}{2^n}$, on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$1 - e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}, \text{ puis } l \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}} \right) \leq \frac{l}{2^n}.$$

On recolle avec l'inégalité 4)d) et on conclut :

$$0 \leq l - u_n \leq \frac{l}{2^n}.$$

e) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{l}{2^n}$ converge car elle a même nature que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$, série géométrique convergente de paramètre $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} (l - u_n)$ converge.

Exercice 3 (edhec 2022)

1) f_n est dérivable sur $[0, 1]$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas (car $n \geq 1$).

$$\forall x \in [0, 1], f'_n(x) = \frac{1 \times (x+n) - 1 \times x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0.$$

Donc f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$.

$f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \frac{1}{n+1}$, d'où le tableau de variations :

x	0	1
$f_n(x)$	0 	$\frac{1}{n+1}$

2) La lecture du tableau de variations de f_n donne :

$$\forall x \in [0, 1], 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n+1}.$$

En divisant membre à membre par n , on a :

$$\forall x \in [0, 1], 0 \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Puis, en intégrant les inégalités entre les bornes croissantes 0 et 1 :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)} dx.$$

$$\text{Et } \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)} dx = \frac{1}{n+1} (1-0) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbf{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

3) On remarque que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ donc $u_n \leq \frac{1}{n^2}$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car c'est une série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

4) a) $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n . On l'a vu, cette série converge donc par définition de la convergence, cela signifie que la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.

$$\text{b) } \forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

On a alors d'après la question 2) : $\forall k \in \mathbf{N}^*, 0 \leq u_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n , on a :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Ce qui donne en télescopant les termes de la somme de droite :

$$0 \leq S_n \leq 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Par passage à la limite, on conclut :

$$0 \leq \gamma \leq 1.$$

c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est positive donc $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante.

5)a) On peut procéder par identification en mettant le membre de droite au même dénominateur ou utiliser l'astuce suivante :

$$\forall x \in [0, 1], \frac{x}{k(x+k)} = \frac{(x+k) - k}{k(x+k)} = \frac{x+k}{k(x+k)} - \frac{k}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}.$$

On déduit pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$u_k = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) dx = \left[\frac{1}{k} \times x - \ln(x+k) \right]_0^1 = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k.$$

b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

On somme les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + (\ln 1 - \ln(n+1)) \quad \text{par télescopage} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1). \end{aligned}$$

6)a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = S_n + \ln(n+1) - \ln n = S_n + \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = S_n + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right). \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) &= 1. \end{aligned}$$

Par continuité de $\ln$ en 1, on a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \gamma$.

Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \gamma$.

b)• Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\ln(n+1) - \ln n = [\ln x]_n^{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx.$$

Or, $\forall x \in [n, n+1]$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

En intégrant entre les bornes croissantes n et $n+1$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx.$$

$$\frac{1}{n+1}[(n+1) - n] \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}[(n+1) - n]$$

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.

Remarque

On pouvait aussi appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $g : x \mapsto \ln x$ sur $[a, b]$ avec $a = n$ et $b = n+1$.

• Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + \ln n - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1). \end{aligned}$$

Or, on a prouvé au-dessus que $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n$.

Donc $T_{n+1} - T_n \leq 0$, ce qui établit que $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante.

c) $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante et de limite γ donc $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $S_n \leq \gamma$.

$(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante et de limite γ donc $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $T_n \geq \gamma$.

En recollant les inégalités, on conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $S_n \leq \gamma \leq T_n$.

7)a) D'après l'encadrement précédent, lorsque $T_n - S_n \leq 10^{-3}$, alors S_n est une valeur approchée par défaut de γ à 10^{-3} près.

b) $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $T_n - S_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

Programme :

```
n=1
s=1-np.log(2)
while np.log(n+1)-np.log(n)>10**-3:
    n=n+1
    s=s+1/n-np.log(n+1)+np.log(n)
print(s)
```

Python affiche $\gamma \approx 0,576$.

Problème (edhec 2021)

Partie I :

1)a) • Cherchons la loi de X_1 .

L'expérience aléatoire est constituée d'un certain nombre d'épreuves successives, identiques et indépendantes.

Pour chaque épreuve, la probabilité de succès (faire pile) vaut p .

X_1 est le rang d'obtention du premier succès.

Donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. De même, $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Ainsi, $X_1(\Omega) = Y_1(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*, P(X_1 = k) = P(Y_1 = k) = q^{k-1}p$.

• La manche dure éternellement si et seulement si A ne fait jamais pile
ou B ne fait jamais pile.

Notons $A_0 = \ll A \text{ ne fait jamais pile} \gg$ et $B_0 = \ll B \text{ ne fait jamais pile} \gg$.

On a alors : $P(\text{manche éternelle}) = P(A_0 \cup B_0)$.

Or, $P(A_0) = 1 - P(A \text{ fait pile})$

$$\begin{aligned} &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k)\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p \\ &= 1 - p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \\ &= 1 - p \sum_{j=0}^{+\infty} q^j \quad \text{en posant } j = k - 1 \\ &= 1 - p \times \frac{1}{1 - q} \\ &= 0 \quad \text{car } 1 - q = p \end{aligned}$$

De même, $P(B_0) = 0$.

Enfin, la formule du crible donne :

$$0 \leq P(A_0 \cup B_0) = P(A_0) + P(B_0) - P(A_0 \cap B_0) \leq P(A_0) + P(B_0) = 0.$$

D'où $P(A_0 \cup B_0) = 0$.

Ainsi, la probabilité que la manche dure éternellement est nulle.

Remarque

On vient de prouver que la réunion de deux événements quasi-impossibles est un événement quasi-impossible.

b) E_1 est réalisé si et seulement si X_1 et Y_1 prennent la même valeur.
Donc $E_1 = (X_1 = Y_1)$.

c) La formule des probabilités totales pour le sce $(Y_1 = i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 P(E_1) &= P(X_1 = Y_1) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = Y_1) \cap (Y_1 = i)) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = i) \cap (Y_1 = i)) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i) \quad \text{par indépendance des joueurs} \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} p q^{i-1} p \\
 &= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} \\
 &= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1} \\
 &= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k \\
 &= p^2 \times \frac{1}{1 - q^2} \\
 &= \frac{p}{1 + q} \quad \text{car } 1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = pq.
 \end{aligned}$$

d) Les lancers de pièce des joueurs A et B sont réalisés dans les mêmes conditions (pièces identiques).

Intuitivement, ils ont donc la même probabilité de gagner la première manche.

Ainsi, $P(G_1) = P(H_1)$.

La famille d'événements (E_1, G_1, H_1) est un système complet car ils sont deux à deux incompatibles et leur réunion fait Ω .

Donc $P(E_1) + P(G_1) + P(H_1) = 1$.

Comme $P(H_1) = P(G_1)$, on déduit :

$$P(G_1) = \frac{1}{2}(1 - P(E_1)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{1 + q} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1 + q - p}{1 + q} = \frac{q}{1 + q}.$$

2)a) G_n est réalisé si et seulement si A gagne la n -ième manche, ce qui se produit si et seulement si il y a égalité lors des $n - 1$ premières manches et si à la n -ième manche, A fait pile avant B.

Ainsi, $G_n = E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap (X_n < Y_n)$.

b) Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons que l'événement $E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}$ est réalisé. La probabilité pour que E_k se réalise est égale à $P(E_1)$, puisque la k -ième manche se fait dans les mêmes conditions que la première.

Ainsi, $P_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) = \frac{p}{1+q}$. On déduit :

$$\begin{aligned} P(G_n) &= P(E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap (X_n < Y_n)) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} P_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) \right) P_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}(X_n < Y_n) \quad \text{probabilités composées} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{p}{1+q} \right) \frac{q}{1+q} \\ &= \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{q}{1+q}. \end{aligned}$$

Remarque

$P_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}(X_n < Y_n) = \frac{q}{1+q}$ car la n -ième manche se fait dans les mêmes conditions que la première.

c) Pour $n = 1$, on a : $P(G_1) = \frac{q}{1+q}$ et on retrouve 1) d).

d) G est réalisé si et seulement si l'un des G_n est réalisé. Donc $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$.

On déduit :

$$\begin{aligned} P(G) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{q}{1+q} \\ &= \frac{q}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \\ &= \frac{q}{1+q} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q} \right)^j \\ &= \frac{q}{1+q} \times \frac{1}{1 - \frac{p}{1+q}} \\ &= \frac{q}{1+q} \times \frac{1+q}{1+q-p} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

e) En faisant exactement la même démarche, on a $P(H) = 1/2$.

La famille d'événements (E, G, H) est un système complet.

On a donc $P(E) + P(G) + P(H) = 1$, c'est-à-dire :

$$P(E) = 1 - P(G) - P(H) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Partie II :

3)a) La formule des probabilités totales pour le sce $(X_1 = i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ donne :

$$\begin{aligned} P(Y_1 = X_1 + 1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = i) \cap (Y_1 = X_1 + 1)) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = i) \cap (Y_1 = i + 1)) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i + 1) \quad \text{par indépendance des joueurs} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} p q^i p \\ &= p^2 q \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} \\ &= p^2 q \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1} \\ &= p^2 q \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k \\ &= p^2 q \times \frac{1}{1 - q^2} \\ &= p^2 q \times \frac{1}{(1 - q)(1 + q)} \\ &= \frac{pq}{1 + q}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } u &= P(Y_1 = X_1 + 1) + P(X_1 = Y_1 + 1) \\ &= 2P(Y_1 = X_1 + 1) \quad \text{par symétrie} \\ &= \frac{2pq}{1 + q}. \end{aligned}$$

$$4)\text{a) } K_n = E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap ((Y_n = X_n + 1) \cup (X_n = Y_n + 1)).$$

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
P(K_n) &= P(E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap ((Y_n = X_n + 1) \cup (X_n = Y_n + 1))) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1} P_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) \right) P_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}((Y_n = X_n + 1) \cup (X_n = Y_n + 1)) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{p}{1+q} \right) \frac{2pq}{1+q} \\
&= \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q}.
\end{aligned}$$

5) K est réalisé si et seulement si l'un des K_n est réalisé. Donc $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$.

On déduit :

$$\begin{aligned}
P(K) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(K_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q} \\
&= \frac{2pq}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \\
&= \frac{2pq}{1+q} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q} \right)^j \\
&= \frac{2pq}{1+q} \times \frac{1}{1 - \frac{p}{1+q}} \\
&= \frac{2pq}{1+q} \times \frac{1+q}{1+q-p} \\
&= p.
\end{aligned}$$

Partie III :

6)Programme :

```
import numpy.random as rd
p=float(input("Entrez une valeur pour p:"))
c=1
X=rd.geometric(p)
Y=rd.geometric(p)
while X==Y:
    X=rd.geometric(p)
    Y=rd.geometric(p)
    c=c+1
if X<Y:
    print("A gagne")
else:
    print("B gagne")
print(c)
```

7)Programme :

```
if X-Y==1 or Y-X==1:
    print("A gagne le deuxième jeu")
else:
    print("B gagne le deuxième jeu")
```