
Correction DS4 CUBES

Exercice 1 (edhec 2011)

1)a) Soit $x > 0$ et $t \in [0, x]$.

De l'inégalité $0 \leq t \leq x$, on, tire :

$1 \leq e^t \leq e^x$ par croissance de l'exponentielle,

$2 \leq e^t + 1 \leq e^x + 1$,

$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{e^t + 1} \geq \frac{1}{e^x + 1}$ par décroissance sur $]0, +\infty[$ de la fonction inverse.

Ainsi, $\forall x > 0, \forall t \in [0, x], \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}$.

b) Soit $x > 0$.

En multipliant membre à membre les inégalités par $t \geq 0$, on a :

$$\frac{t}{e^x + 1} \leq \frac{t}{e^t + 1} \leq \frac{t}{2}.$$

Puis, on intègre entre les bornes croissantes 0 et x :

$$\int_0^x \frac{t}{e^x + 1} dt \leq \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq \int_0^x \frac{t}{2} dt \quad (*)$$

$$\text{Or, } \int_0^x \frac{t}{e^x + 1} dt = \frac{1}{e^x + 1} \int_0^x t dt = \frac{1}{e^x + 1} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{e^x + 1} \times \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Et } \int_0^x \frac{t}{2} dt = \left[\frac{t^2}{4} \right]_0^x = \frac{x^2}{4}.$$

On remplace dans (*) :

$$\frac{1}{e^x + 1} \times \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq \frac{x^2}{4}.$$

On multiplie membre à membre par $\frac{2}{x^2} > 0$ et on obtient :

$$\forall x > 0, \frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}.$$

D'après la propriété des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

Or, par énoncé, $f(0) = \frac{1}{2}$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

$$\text{2)a) Soit } \varphi : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt.$$

$h : t \mapsto \frac{t}{e^t + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (quotient de fonctions continues).

D'après le cours, φ est une primitive de h sur $[0, +\infty[$.

φ est donc de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geq 0, \varphi'(x) = \frac{x}{e^x + 1}$.

Revenons à f .

Pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \frac{2}{x^2} \varphi(x)$.

f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ comme produit et quotient de fonctions C^1 .

$$\begin{aligned} \text{De plus, } \forall x > 0, f'(x) &= -\frac{4}{x^3} \varphi(x) + \frac{2}{x^2} \varphi'(x) \\ &= -\frac{4}{x^3} \varphi(x) + \frac{2}{x^2} \times \frac{x}{e^x + 1} \\ &= -\frac{4}{x^3} \underbrace{\left(\varphi(x) - \frac{x^2}{2(e^x + 1)} \right)}_{g(x)}. \end{aligned}$$

b) g est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme différence et quotient de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, g'(x) &= \varphi'(x) - \frac{1}{2} \times \frac{2x(e^x + 1) - x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{x}{e^x + 1} - \frac{2x(e^x + 1) - x^2 e^x}{2(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{2x(e^x + 1) - [2x(e^x + 1) - x^2 e^x]}{2(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 e^x}{2(e^x + 1)^2}. \end{aligned}$$

$\forall x \geq 0, g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[0, +\infty[$.

$$\text{Or, } g(0) = \varphi(0) = \int_0^0 \frac{t}{e^t + 1} dt = 0.$$

On a donc $\forall x \geq 0, g(x) \geq 0$.

Par ailleurs, $\forall x > 0, f'(x) = -\frac{4}{x^3} g(x)$ avec $g(x) \geq 0$ et $-\frac{4}{x^3} < 0$.

Donc $\forall x > 0, f'(x) \leq 0$, ce qui prouve la décroissance de f sur $]0, +\infty[$.

f étant continue en 0 et décroissante sur $]0, +\infty[$, elle est aussi décroissante sur $[0, +\infty[$.

$$3)a) \forall t \geq 0, \frac{t}{e^t + 1} \leq 1 \iff t \leq e^t + 1 \iff e^t \geq t - 1.$$

La fonction exponentielle est convexe. Elle est donc au-dessus de toutes ses tangentes ; l'une d'entre elles, la tangente en 0 a pour équation $y = t - 1$.

Donc $\forall t \geq 0, e^t \geq t - 1$, puis $\frac{t}{e^t + 1} \leq 1$.

b) Soit $x > 0$. En intégrant entre les bornes croissantes 0 et x , on a :

$$\int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq \int_0^x 1 dt, \text{ c'est-à-dire : } \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq x.$$

On multiplie membre à membre par $\frac{2}{x^2}$, ce qui donne : $f(x) \leq \frac{2}{x}$.

On a par ailleurs $f(x) \geq 0$, ce qu'on peut voir facilement en utilisant 1)b).

Ainsi, $\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$. D'après la propriété des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 2 (edhec 2008)

$$1)a) \bullet A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}, \text{ puis } (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -16 \\ -4 & -4 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Puis, } A(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -8 & -16 \\ -4 & -4 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Soit $P(X) = X(X - 2)^2$.

$P(A) = A(A - 2I)^2 = 0$ donc P est un polynôme annulateur de A .

D'après le cours, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P , à savoir $\{0, 2\}$.

Ainsi, les valeurs propres possibles de A sont 0 et 2.

$$b) AU = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0U.$$

U est non nul et vérifie $AU = 0U$. C'est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

$$AV = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2V.$$

V est non nul et vérifie $AV = 2V$. C'est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

On a confirmé ci-dessus que 0 et 2 sont valeurs propres de A et il n'y en a pas d'autres possibles d'après 1)a).

Ainsi, les valeurs propres de A sont 0 et 2.

c) 0 est valeur propre de A donc A n'est pas inversible.

A étant la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on conclut que f est bijectif.

f est un endomorphisme bijectif de $\mathbf{R}^3$ donc un automorphisme de $\mathbf{R}^3$.

2)a) Pour tous réels a, b et c , on a :

$$au + bv + cw = 0 \iff a(2, 1, -2) + b(3, 1, -2) + c(-2, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} 2a + 3b - 2c = 0 \\ a + b = 0 \\ -2a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a - 3a - 2c = 0 \\ b = -a \\ -2a + 2a + c = 0 \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc la famille (u, v, w) est libre.

C'est une famille libre donc le cardinal vaut 3, et qui coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

b) On cherche des réels x et y tels que $f(w) = xv + yw$.

La matrice colonne de $f(w)$ dans $\mathcal{B}$ est AW , où W est la matrice colonne de w dans $\mathcal{B}$.

La matrice colonne de $xv + yw$ dans $\mathcal{B}$ est $xV + yW$.

Ainsi, $f(w) = xv + yw \iff AW = xV + yW$

$$\begin{aligned} \iff & \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ x \\ -2x + y \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x = 1 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $f(w) = v + 2w$.

c) On a vu dans la question 1)b) que $AU = 0U$ et $AV = 2V$. Ces égalités sont la traduction matricielle des égalités vectorielles : $f(u) = 0u$ et $f(v) = 2v$.

On a donc $f(u) = 0u + 0v + 0w$, $f(v) = 0u + 2v + 0w$ et $f(w) = 0u + 1v + 2w$.

On conclut que la matrice de f dans la base (u, v, w) est :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) T est triangulaire, ses valeurs propres sont 0 et 2.

T est de rang 2 car elle comporte une colonne nulle, ainsi qu'une deuxième et troisième colonne non colinéaires.

D'après le cours, $\dim E_0(T) + \text{rg}(T) = 3$, ce qui donne $\dim E_0(T) = 1$.

Même raisonnement pour $T - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\text{rg}(T - 2I) = 1$, puis $\dim E_2(T) + \text{rg}(T - 2I) = 3$ donne $\dim E_2(T) = 1$.

La somme des dimensions des sep de T vaut 2, alors que $T \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

D'après le thm de réduction, T n'est pas diagonalisable.

Remarque

Le calcul des sous-espaces propres de T était possible, mais non nécessaire. Seule la dimension des sep de T importait.

e) T et A sont la matrice d'un même endomorphisme f dans les bases respectives (u, v, w) et $\mathcal{B}$.

D'après la formule de changement de base, on a :

$$T = P^{-1}AP \quad (1)$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à (u, v, w) .

Faisons un raisonnement par l'absurde en supposant A diagonalisable.

Alors, il existe Q inversible et D diagonale telle que

$$A = QDQ^{-1} \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit :

$$T = P^{-1}QDQ^{-1}P = (P^{-1}Q)D(P^{-1}Q)^{-1}.$$

$R = P^{-1}Q$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles et l'égalité ci-dessus donne : $T = RDR^{-1}$.

T est semblable à une matrice diagonale, T est donc diagonalisable, ce qui contredit la question 2)d).

Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

Remarque

On pouvait aussi calculer les sous-espaces propres de A et appliquer le thm de réduction.

$$3)a) \text{ On obtient : } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $T^n = D^n + nD^{n-1}N$ ».

$\mathcal{P}(1)$ s'écrit : « $T = D + N$ », c'est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n T \\ &= (D^n + nD^{n-1}N) T \quad \text{par HR} \\ &= (D^n + nD^{n-1}N) (D + N) \\ &= D^{n+1} + D^n N + nD^{n-1}ND + nD^{n-1}N^2 \\ &= D^{n+1} + D^n N + nD^{n-1}DN + 0 \quad \text{car } DN = ND \text{ et } N^2 = 0 \\ &= D^{n+1} + D^n N + nD^n N \\ &= D^{n+1} + (n+1)D^n N. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On déduit que $\forall n \in \mathbf{N}^*, T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

Remarque

Cette question pouvait aussi se démontrer en utilisant la formule du binôme.

b) Comme D est diagonale, on a $\forall k \in \mathbf{N}^*, D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

La question 3)a) donne pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} T^n &= D^n + nD^{n-1}N \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Et pour $n = 1$, l'égalité reste valable.

Remarque

L'égalité $D^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ n'est pas valable pour $n = 1$.

C'est pour cette raison qu'on a pris $n \geq 2$ dans le calcul.

c)• En reprenant le raisonnement fait dans la question 2)e), on a :

$T = P^{-1}AP$ ou encore $A = PTP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base (u, v, w) .

En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on a :

$u = 2e_1 + 1e_2 - 2e_3$, $v = 3e_1 + 1e_2 - 2e_3$ et $w = -2e_1 + 0e_2 + 1e_3$.

On déduit :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- On calcule P^{-1} par la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_3 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix}$$

$$\text{Donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) C'est une récurrence très classique !

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $A^n = PT^n P^{-1}$ ».

$\mathcal{P}(0)$ est vraie car $A^0 = I$ et $PT^0 P^{-1} = PIP^{-1} = I$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ / Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n A \\
&= PT^n P^{-1} A \quad \text{par HR} \\
&= PT^n P^{-1} P T P^{-1} \\
&= PT^n I T P^{-1} \\
&= PT^{n+1} P^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}$, $A^n = PT^n P^{-1}$.

e) En reprenant le calcul de T^n de la question 3)b), on a pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned}
A^n &= PT^n P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 3 \times 2^n & 3n2^{n-1} - 2^{n+1} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & -2^{n+1} & -n2^n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \times 2^n & 3 \times 2^{n+1} + 3n2^n - 2^{n+2} & 3 \times 2^{n+1} + 3n2^{n-1} - 2^{n+1} \\ 2^n & 2^{n+1} + n2^n & 2^{n+1} + n2^{n-1} \\ -2^{n+1} & -2^{n+2} - n2^{n+1} + 2^{n+1} & -2^{n+2} - n2^n + 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En utilisant que $2^{n+2} = 8 \times 2^{n-1}$, $2^{n+1} = 4 \times 2^{n-1}$ et $2^n = 2 \times 2^{n-1}$, on peut

factoriser les coefficients par 2^{n-1} , ce qui donne au final :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 6 & 6n + 4 & 3n + 8 \\ 2 & 2n + 4 & n + 4 \\ -4 & -4n - 4 & -2n - 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (edhec 2020)

1) On suppose que $n = 1$.

Il n'y a qu'une seule boule dans U, l'événement $(X = 1)$ est certain.

On pioche alors 1 boule dans V. Cette boule peut être blanche, auquel cas $(Y = 1)$ est réalisé. Sinon, $(Y = 0)$ est réalisé.

On a : $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(Y = 1) = p$.

Y suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

2) $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{n}$.

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Le cours donne : $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

3) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Supposons l'événement $(X = k)$ réalisé.

On pioche alors avec remise k boules dans l'urne V. Ces k épreuves sont successives et indépendantes, du fait de la remise.

A chaque épreuve, la probabilité de succès (tirer une blanche) vaut p .

Y compte le nombre de succès.

Donc la loi de Y conditionnée par l'événement $(X = k)$ suit la loi binomiale de paramètres k et p .

Calculons $P_{(X=k)}(Y = i)$ en distinguant deux cas :

• $0 \leq i \leq k$

$$P_{(X=k)}(Y = i) = \binom{k}{i} p^i q^{k-i}.$$

• $k < i$

$P_{(X=k)}(Y = i) = 0$ car on ne peut pas tirer i blanches, si on tire un nombre inférieur k de boules.

$$\text{Ainsi, } P_{(X=k)}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si } k < i \end{cases}$$

4)a) Comme la plus grande valeur de X est n , on ne peut pas piocher plus de n boules dans V. Donc $Y(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$.

Réciproquement.

– si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $(Y = k)$ se réalise si on tire par exemple le numéro k dans U, puis k boules blanches (ce n'est pas la seule possibilité bien sûr !),

– si $k = 0$, alors $(Y = 0)$ se réalise dès lors qu'on tire un numéro quelconque dans U, puis aucune boule blanche dans V.

Donc $\llbracket 0, n \rrbracket \subset Y(\Omega)$.

Finalement, $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

La formule des probabilités totales pour le sce $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$ donne :

$$\begin{aligned}
 P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^n P([X = k] \cap [Y = 0]) \\
 &= \sum_{k=1}^n P_{(X=k)}(Y = 0)P(X = k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{k}{0} p^0 q^k \times \frac{1}{n} \quad \text{grâce à 3) avec } i = 0 \\
 &= \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n q^k \\
 &= \frac{1}{n} \times \left(\sum_{k=0}^n q^k - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{n} \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} \\
 &= \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.
 \end{aligned}$$

b) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

La formule des probabilités totales pour le sce $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$ donne :

$$\begin{aligned}
 P(Y = i) &= \sum_{k=1}^n P([X = k] \cap [Y = i]) \\
 &= \sum_{k=1}^n P_{(X=k)}(Y = i)P(X = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{P_{(X=k)}(Y = i)}_{=0 \text{ car } k < i} P(X = k) + \sum_{k=i}^n P_{(X=k)}(Y = i)P(X = k) \\
 &= \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \times \frac{1}{n} \quad \text{grâce à 3)}
 \end{aligned}$$

Cette somme possède bien $n - i + 1$ termes.

5)a) Pour tous entiers i et k tels que $1 \leq i \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
 i \binom{k}{i} &= i \times \frac{k!}{(k-i)!i!} = \frac{i \times (k-1)! \times k}{(k-i)! \times (i-1)! \times i} = k \times \frac{(k-1)!}{(k-i)! \times (i-1)!} \\
 &= k \times \frac{(k-1)!}{((k-1) - (i-1))! \times (i-1)!} = k \binom{k-1}{i-1}.
 \end{aligned}$$

b) Y est discrète finie donc admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{i=0}^n iP(Y=i) \\
 &= \sum_{i=1}^n iP(Y=i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \times \frac{1}{n} \right) \quad \text{grâce à 4)b)} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right) \quad \text{grâce à 5)a)} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)
 \end{aligned}$$

c) Calculons la deuxième somme en posant $j = i - 1$ ou $i = j + 1$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^{j+1} q^{k-j-1} \\
 &= p \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^j q^{k-1-j} \\
 &= p \times (p+q)^{k-1} \quad \text{par la formule du binôme} \\
 &= p \quad \text{car } p+q=1.
 \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'égalité 5)b), on a :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kp = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{p}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)p}{2}.$$

6)a) Soit $n \geq 2$, un entier.

$Y(Y-1)$ est discrète finie. Elle admet donc une espérance.

D'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \sum_{i=0}^n i(i-1)P(Y=i) \\
&= \sum_{i=2}^n i(i-1)P(Y=i) \\
&= \sum_{i=2}^n \left(i(i-1) \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \times \frac{1}{n} \right) \quad \text{grâce à 4)b)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \left(\sum_{k=i}^n i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \quad (*)
\end{aligned}$$

Or, pour tous entiers i et k tels que $2 \leq i \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
i(i-1) \binom{k}{i} &= (i-1)i \binom{k}{i} \\
&= (i-1)k \binom{k-1}{i-1} \quad \text{grâce à 5)a)} \\
&= k(i-1) \binom{k-1}{i-1} \\
&= k(k-1) \binom{k-2}{i-2} \quad \text{grâce à 5)a) avec } i \rightarrow i-1 \text{ et } k \rightarrow k-1
\end{aligned}$$

On reporte ce calcul dans (*) :

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \left(\sum_{k=i}^n k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq k \leq n} k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(\sum_{i=2}^k k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Enfin, } \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} &= \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^{j+2} q^{k-j-2} \quad \text{en posant } j = i-2 \\
&= p^2 \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^j q^{k-2-j} \\
&= p^2 \times (p+q)^{k-2} \quad \text{par la formule du binôme} \\
&= p^2.
\end{aligned}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} E(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n k(k-1)p^2 \\ &= \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^n k(k-1) \\ &= \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^n k(k-1) \quad \text{car le premier terme est nul} \\ &= \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{p^2}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6} \\ &= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)((2n+1)-3)}{6} \\ &= p^2 \times \frac{(n+1) \times 2(n-1)}{6} \\ &= \frac{(n^2-1)p^2}{3}. \end{aligned}$$

c) Lorsque $n = 1$, on a vu dans la question 1) que $y \mapsto \mathcal{B}(p)$.

Y ne prend que 0 et 1 comme valeurs.

Donc $Y(Y-1)$ est certaine et égale à 0.

Cela entraîne que $E(Y(Y-1)) = 0$, et on retrouve la valeur donnée par l'égalité 5)b) pour $n = 1$.

d) Y est discrète finie donc admet une variance.

La formule de Koëinig donne :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2.$$

En écrivant $Y^2 = Y(Y-1) + Y$ et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(Y^2) = E(Y(Y-1)) + E(Y).$$

On conclut que $V(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2$.

Problème (edhec 2017)

Partie 1

1) A l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1. A l'instant 1, le mobile sera de façon équiprobable sur l'un quelconque des sommets 2, 3 ou 4.

On a donc $X_1(\Omega) = \llbracket 2, 4 \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 2, 4 \rrbracket, P(X_1 = k) = \frac{1}{3}$.

Ainsi, X_1 suit la loi uniforme sur $\llbracket 2, 4 \rrbracket$.

$$E(X_1) = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} = 3.$$

2) Montrons que $\forall n \geq 2, X_n(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

En terme de graphe, cela revient à établir qu'on peut trouver une chaîne de longueur n joignant le sommet 1 à n'importe lequel des sommets.

Distinguons deux cas selon la parité de n .

- n pair ($n = 2k$ avec $k \in \mathbf{N}^*$)

$1 \rightarrow 1$: faire k fois le cycle 1-2-1,

$1 \rightarrow i$ avec $i \in \{2, 3, 4\}$: prendre une chaîne de longueur 2 entre 1 et i , puis faire $k - 1$ fois le cycle $i - 1 - i$.

- n impair ($n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbf{N}^*$)

$1 \rightarrow 1$: prendre un cycle de longueur 3 entre 1 et 1, puis faire $k - 1$ fois le cycle 1-2-1,

$1 \rightarrow i$ avec $i \in \{2, 3, 4\}$: faire k fois le cycle 1-2-1, puis prendre l'arête $1 - i$.

Remarques

– La figure de l'énoncé est le graphe complet K_4 .

Plus généralement, on peut montrer que dans le graphe K_p avec $p \geq 3$, on peut pour tout entier $n \geq 2$ joindre deux sommets quelconques de ce graphe par une chaîne de longueur n .

– Si on n'aime pas les graphes, on peut tenter une récurrence sur n .

Pour l'hérédité : on prend $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on cherche si à l'instant $n + 1$, on peut faire parvenir le mobile en i .

Par hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$, ce qui signifie qu'on peut par exemple faire parvenir le mobile en $j \neq i$ à l'instant n . Il reste ensuite à le déplacer de j vers i . A l'instant $n + 1$, le mobile est alors en i .

3)a) Soit $n \geq 2$ un entier.

Comme $X_n(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$, la famille d'événements $((X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4))$ est un système complet.

La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=1}^4 P((X_{n+1} = 1) \cap (X_n = k)) \\ &= P((X_{n+1} = 1) \cap (X_n = 1)) + \sum_{k=2}^4 P((X_{n+1} = 1) \cap (X_n = k)) \end{aligned}$$

Or, $P((X_{n+1} = 1) \cap (X_n = 1)) = 0$ car le mobile ne peut pas à deux instants consécutifs être sur le même sommet.

On poursuit le calcul :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=2}^4 P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 1)P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=2}^4 \frac{1}{3}P(X_n = k) \\ &= \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)). \end{aligned}$$

b)• X_0 suit une loi certaine égale à 1.

On a donc $P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 0$.

De plus, $P(X_1 = 1) = 0$.

Pour $n = 0$, l'égalité 3)a) s'écrit alors : $0 = \frac{1}{3}(0 + 0 + 0)$, ce qui est vrai.

• On a vu dans 1) que $P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = P(X_1 = 4) = \frac{1}{3}$.

De plus, l'énoncé donne : $P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$.

Pour $n = 1$, l'égalité 3)a) s'écrit : $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$, ce qui est vrai.

c) L'égalité $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ provient du fait que la famille d'événements $((X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4))$ est un système complet.

On déduit : $\forall n \in \mathbf{N}$, $P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1 - P(X_n = 1)$.

En substituant dans l'égalité 3)a), on a :

$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(1 - P(X_n = 1))$, c'est-à-dire :

$$P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.$$

d) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $u_n = P(X_n = 1)$.

On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}$ (1)

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc arithmético-géométrique.

On cherche le réel x tel que $x = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ (2)

On obtient : $\frac{4}{3}x = \frac{1}{3}$, soit $x = \frac{1}{4}$.

La différence de (1) et (2) donne : $u_{n+1} - x = -\frac{1}{3}(u_n - x)$,

c'est-à-dire : $u_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{1}{4}\right)$.

La suite $\left(u_n - \frac{1}{4}\right)_{n \geq 0}$ est donc géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

On a donc $\forall n \in \mathbf{N}, u_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(u_0 - \frac{1}{4}\right)$.

Comme $u_0 = P(X_0 = 1) = 1$, on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Remarque

La formule de $P(X_n = 1)$ étant fournie par l'énoncé, on pouvait aussi faire une récurrence.

4)a) La formule des probabilités totales donne de la même façon :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= \sum_{k=1}^4 P((X_{n+1} = 2) \cap (X_n = k)) \\ &= P((X_{n+1} = 2) \cap (X_n = 2)) + \sum_{k \in \{1,3,4\}} P((X_{n+1} = 2) \cap (X_n = k)) \\ &= 0 + \sum_{k \in \{1,3,4\}} P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 2)P(X_n = k) \\ &= \sum_{k \in \{1,3,4\}} \frac{1}{3} P(X_n = k) \\ &= \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)). \end{aligned}$$

b) $\forall n \in \mathbf{N}, P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1 - P(X_n = 2)$.

En substituant dans l'égalité 4)a), on a :

$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3} (1 - P(X_n = 2))$, c'est-à-dire :

$$P(X_{n+1} = 2) = -\frac{1}{3} P(X_n = 2) + \frac{1}{3}.$$

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = P(X_n = 2)$.

On a $\forall n \in \mathbf{N}, v_{n+1} = -\frac{1}{3} v_n + \frac{1}{3}$.

La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est arithmético-géométrique.

Avec la même technique que dans la question 3)d), on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N}, v_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(v_0 - \frac{1}{4}\right).$$

Comme $v_0 = P(X_0 = 2) = 0$, on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbf{N}, v_n = P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

5) Les suites $(P(X_n = 2))_{n \geq 0}$, $(P(X_n = 3))_{n \geq 0}$ et $(P(X_n = 4))_{n \geq 0}$ vérifient la même relation de récurrence et ont le même premier terme, puisque $P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 0$.

Elles sont donc égales, ce qui permet de conclure que

$$\forall n \in \mathbf{N}, P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n.$$

6) X_n est discrète finie donc admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) + 3 \times P(X_n = 3) + 4 \times P(X_n = 4) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n + (2 + 3 + 4) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3} \right)^n. \end{aligned}$$

Partie 2

7)a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$U_n A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice ligne $(a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)$ avec :

$$a_1 = \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)) = P(X_{n+1} = 1).$$

$$a_2 = \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)) = P(X_{n+1} = 2).$$

$$a_3 = \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 4)) = P(X_{n+1} = 3).$$

$$a_4 = \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3)) = P(X_{n+1} = 4).$$

Cette matrice ligne est U_{n+1} .

Pour a_1 et a_2 , cela provient des questions 3)a) et 4)a).

Quant à a_3 et a_4 , on les obtient par un raisonnement analogue.

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} = AU_n.$$

Remarque

A s'appelle la matrice de transition du graphe probabiliste.

b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $\ll U_n = U_0 A^n \gg$.

$U_0 A^0 = U_0 I = U_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= U_n A \\
&= U_0 A^n A \quad \text{par HR} \\
&= U_0 A^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_n = U_0 A^n$.

$$c) U_0 = \begin{pmatrix} P(X_0 = 1) & P(X_0 = 2) & P(X_0 = 3) & P(X_0 = 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Posons } A^n = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a alors : } U_n = U_0 A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

La première ligne de A^n est donc U_n , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

8)• Position initiale du mobile en 2 :

$$\text{On a alors : } U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Posons } A^n = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}. \text{ On a alors : } U_n = U_0 A^n = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

La seconde ligne de A^n est donc U_n , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

• Position initiale du mobile en 3 :

La troisième ligne de A^n est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

• Position initiale du mobile en 4 :

La quatrième ligne de A^n est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Partie 3

$$9) A = aI + bJ$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b & b & b \\ b & a+b & b & b \\ b & b & a+b & b \\ b & b & b & a+b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b=1/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1/3 \\ b=1/3 \end{cases}$$

$$\text{Donc } A = -\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J.$$

10)a) On vérifie facilement que $J^2 = 4J$.

Puis, récurrence en posant $\mathcal{P}(k) : \ll J^k = 4^{k-1}J \gg$.

Pour $k=1$, on a : $J^1 = J$ et $4^0J = J$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} J^{k+1} &= J^k J \\ &= (4^{k-1}J)J \quad \text{par HR} \\ &= 4^{k-1}J^2 \\ &= 4^{k-1}(4J) \\ &= 4^k J. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}^*, J^k = 4^{k-1}J$.

b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$A^n = \left(-\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J\right)^n = \left(\frac{1}{3}(J - I)\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (J - I)^n.$$

La formule du binôme s'applique car I et J commutent, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k (-I)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k \right) \quad \text{en isolant le terme d'indice 0} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} J \right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} \right) J \quad (*)
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la somme.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^k \\
&= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^k - (-1)^n \right) \quad \text{en retranchant le terme d'indice 0} \\
&= \frac{1}{4} ((-1+4)^n - (-1)^n) \quad \text{par la formule du binôme} \\
&= \frac{1}{4} (3^n - (-1)^n).
\end{aligned}$$

On reporte dans (*) :

$$A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{4} (3^n - (-1)^n) \right) J.$$

Ce qui donne après simplifications :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) J.$$

c) Pour $n = 0$, l'égalité reste valable puisque

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^0 I + \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^0 \right) J = 1I + \frac{1}{4}(1-1)J = I = A^0.$$

Partie 4

11)a) A la deuxième ligne, on définit la nouvelle liste L par compréhension en ne prenant que les éléments j de L qui sont différents de 2.

Donc à la fin du programme, $L=[1,3,4]$.

b) Programme

```
def markov(n):
    X=[0]*(n+1)
    X[0]=1
    for k in range(1,n+1):
        L=[1,2,3,4]
        L=[j for j in L if j!=X[k-1]]
        X[k]=rd.choice(L)
    return X
```

c) Programme

```
trajet=markov(100)
r=trajet.count(1)
print(r-1)
```

Remarque

On met `print(r-1)` et non `print(r)` pour ne pas compter la position initiale du mobile qui est 1.

d) On introduit la suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k \geq 1}$ par :

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si le mobile est en 1 à l'instant } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Posons } Y = \sum_{k=1}^{100} Y_k$$

Y représente le nombre de fois où le mobile repasse par le sommet 1, lors de ses 100 premiers déplacements.

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\sum_{k=1}^{100} Y_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{100} E(Y_k) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= \sum_{k=1}^{100} P(Y_k = 1) \quad \text{car } Y_k \text{ suit une loi de Bernoulli} \\ &= \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{d'après 3)d)} \end{aligned}$$

On poursuit en calculant la somme :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \sum_{k=1}^{100} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ &= 25 + \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{100}}{1 + \frac{1}{3}} \\ &= 25 - \frac{3}{16} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{100}\right) \end{aligned}$$

≈ 25 .

Interprétation :

Cela signifie qu'en moyenne, le mobile revient 25 fois sur le sommet 1 au cours de ses 100 premiers déplacements.

Il est donc logique que les valeurs données par l'énoncé 23,28,23,25 et 26 soient proches de 25.

Remarque

Ce n'est qu'une moyenne !

En n'exécutant que 5 fois le programme 11)c) comme dans l'énoncé, on pourrait avoir des valeurs de r assez éloignées de 25.

C'est en exécutant un plus grand nombre de fois le programme 11)c) qu'on obtiendrait une valeur moyenne de r proche de 25.

Une question vraiment difficile !