
Correction DM12

Exercice

1) On a $P(B_1) = 1/3$.

2) La formule des probabilités totales pour le système complet (B_1, N_1) donne :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P_{B_1}(B_2)P(B_1) + P_{N_1}(B_2)P(N_1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

3) La formule des probabilités totales pour le système complet (B_k, N_k) donne :

$$\begin{aligned} P(B_{k+1}) &= P_{B_k}(B_{k+1})P(B_k) + P_{N_k}(B_{k+1})P(N_k) \\ &= \frac{2}{3}P(B_k) + \frac{1}{3}P(N_k) \\ &= \frac{2}{3}P(B_k) + \frac{1}{3}[1 - P(B_k)] \\ &= \frac{1}{3}P(B_k) + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4) La suite $(P(B_k))_{1 \leq k \leq n}$ est arithmético-géométrique.

- On cherche le réel x tel que $x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. On trouve $x = \frac{1}{2}$.

- On pose $V_k = P(B_k) - x = P(B_k) - \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad V_{k+1} &= P(B_{k+1}) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}P(B_k) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}P(B_k) - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \left(P(B_k) - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3}V_k. \end{aligned}$$

La suite $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

- On a donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad V_k = V_1 \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} = \left(P(B_1) - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1}$.

- On déduit : $P(B_k) = \frac{1}{2} + V_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^k$.

5) Supposons que N_1 soit réalisé.

On est alors avec $n-1$ urnes $U_2, \dots, U_n$ où U_2 contient 2 boules noires et 1 boule blanche, alors que les autres contiennent 1 boule noire et 1 boule blanche, ce qui revient à la configuration initiale avec $n \rightarrow n-1$.

Donc $P_{N_1}(B_n) = P(B_{n-1})$.

6) • B_n est la réunion des événements incompatibles $B_1 \cap B_n$ et $N_1 \cap B_n$.

Donc par additivité, on a :

$$P(B_n) = P(B_1 \cap B_n) + P(N_1 \cap B_n).$$

$$\begin{aligned} \text{Puis, } P(B_1 \cap B_n) &= P(B_n) - P(N_1 \cap B_n) \\ &= P(B_n) - P(N_1)P_{N_1}(B_n) \\ &= P(B_n) - \frac{2}{3}P(B_{n-1}). \end{aligned}$$

• N_1 est la réunion des événements incompatibles $N_1 \cap N_n$ et $N_1 \cap B_n$.

Donc par additivité, on a :

$$P(N_1) = P(N_1 \cap N_n) + P(N_1 \cap B_n).$$

$$\text{Puis, } P(N_1 \cap N_n) = P(N_1) - P(N_1 \cap B_n) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}P(B_{n-1}).$$

7) L'événement « l'urne 1 n'a pas changé de composition à l'issue des n tirages » est la réunion des événements incompatibles $B_1 \cap B_n$ et $N_1 \cap N_n$.

Donc par additivité, la probabilité demandée est :

$$\begin{aligned} &P(B_1 \cap B_n) + P(N_1 \cap N_n) \\ &= \left(P(B_n) - \frac{2}{3}P(B_{n-1}) \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}P(B_{n-1}) \right) \\ &= P(B_n) - \frac{4}{3}P(B_{n-1}) + \frac{2}{3} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right) + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}. \end{aligned}$$