DS1 ecg2 - maths appliquées
25/09/2024

Exercice 1
Soit F la partie de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \; | 2x + y - z = 0\right\}.$$

1)a)Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et préciser une famille génératrice de F.

b)Déterminer une base de F, puis préciser la dimension de F.

2)On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ donnés par : $u = (2,-3,1)$, $v = (3,1,7)$ et $w = (1,1,-1)$.

a)Les vecteurs u, v et w appartiennent-ils à F ?

b)Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbf{R}^3$.

3)Soit le vecteur $x = (1,3,\gamma)$ où γ est un paramètre réel.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur γ pour que $x \in \operatorname{Vect}(v,w)$.

Exercice 2
Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit F la partie de $\mathbf{R}^n$ définie par :

$$F = \left\{(x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}.$$

On note $\mathscr{B} = (e_1,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le vecteur e_i a donc toutes ses composantes nulles, sauf la i-ème qui vaut 1.
Pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$, on pose $u_i = e_i - e_n$.

1)Montrer que $F = \operatorname{Vect}(u_1,...,u_{n-1})$.

2)Montrer que $(u_1,...,u_{n-1})$ est une base de F. En déduire la dimension de F.

3)On suppose dans cette question que $n = 4$. On pose $w = (1,1,1,1)$.

a)Ecrire la matrice de passage P de $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ à $\mathscr{C} = (u_1,u_2,u_3,w)$.

b)Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Que peut-on conclure pour $\mathscr{C}$?

c)Soit $u = (1,2,3,4)$. Calculer les coordonnées de u dans la base $\mathscr{C}$.

4)On revient au cas général où $n \geq 2$.
Soit $w = (y_1,...,y_n)$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$. On note $\mathscr{C} = (u_1,...,u_{n-1},w)$.

a)On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$. Justifier que la famille $\mathscr{C}$ est liée.

b)On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \neq 0$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 3
On considère les matrices d'ordre 3 suivantes :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note f l'application qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ associe la matrice :

$$f(M) = HMG - GMH$$

.
Partie A :
1)Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

2) Calculer les matrices $D = P^{-1}GP$ et $\Delta = P^{-1}HP$, puis vérifier qu'elles sont diagonales.

3) Calculer H^2, HG et GH .

4) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ H^nG = GH^n$

Partie B :
1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

2) Montrer à l'aide de la partie A que les matrices I, H et H^2 appartiennent à $Kerf$ puis conclure que Vect $(I, H, H^2) \subset Kerf$.

3) Montrer que la famille (I, H, H^2) est liée puis conclure que $dim(Kerf) \geq 2$.

Partie C :
1) Montrer que $M \in Kerf \Longleftrightarrow \Delta P^{-1}MPD = DP^{-1}MP\Delta$.

2) Soit X une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

Montrer que $\Delta XD = DX\Delta \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$.

3) Déduire des questions C1 et C2 :

$$Kerf = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

4) Déterminer une base de Ker f puis donner la dimension de $Kerf$.

Exercice 4

1)Montrer que $\forall x > 0,\ x - \ln x > 0$.

2)On définit alors la fonction f sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a)Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b)Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

c)Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

d)Déterminer la limite de f en $+\infty$.

e)Dresser le tableau de variations de f.

f)On donne $e \approx 2,7$.
Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ ainsi que tous les éléments qui vous paraissent utiles.