Exercice 1 (eml 2025)

Partie A :

1)a)Récurrence.
Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n > 0$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 1 > 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par HR, $u_n > 0$. De plus, $e^{1/u_n} > 0$. Par produit, $u_{n+1} > 0$.

On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

b)$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n\left(e^{1/u_n} - 1\right)$.

$u_n > 0$ donc $1/u_n > 0$ et $e^{1/u_n} > 1$. D'où $e^{1/u_n} - 1 > 0$.

Par produit, $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.

c)$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant croissante, elle admet une limite. Cette limite est soit un nombre réel L, soit $+\infty$.
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, on a : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq u_0$, soit $u_n \geq 1$.

Par passage à la limite, on a alors : $L \geq 1 \quad (*)$

De plus, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto xe^{1/x}$.
f est continue sur $\mathbf{R}^*$ donc en L.
D'après le théorème du point fixe, L est un point fixe de f. Elle est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned}
\text{Or, } f(x) = x &\iff xe^{1/x} = x \\
&\iff x\left(e^{1/x} - 1\right) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } e^{1/x} - 1 = 0 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{1}{x} = 0}_{\text{impossible}}\quad .
\end{aligned}$$

0 est donc le seul point fixe de f. Donc $L = 0$, ce qui contredit $(*)$.

On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2)programme

```
import numpy as np
u=1
n=0
while u<10**6:
    u=u*np.exp(1/u)
    n=n+1
print(n)
```

Partie B :

3)• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{t\to0}e^t=1$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1/x}=1$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$. Par composition, $\lim\limits_{x\to0^+}e^{1/x}=+\infty$.
$\lim\limits_{x\to0^+}x=0$. Donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ est une FI du type $0\times+\infty$.
Posons $X=\dfrac{1}{x}$. Quand $x\to0^+, X\to+\infty$.
Donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}e^X=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$ par croiss. comparées.
4)f est dérivable sur $]0,+\infty[$ par produit et composées de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ f'(x)&=1\times e^{1/x}+x\times\left(-\frac{1}{x^2}e^{1/x}\right)\\&=e^{1/x}-\frac{1}{x}e^{1/x}\\&=\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{1/x}\\&=\frac{x-1}{x}e^{1/x}.\end{aligned}$$

$x>0$ et $e^{1/x}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$.

t	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

5)a)La série $\sum\limits_{k\geq0}\dfrac{x^{-k}}{k!}$ peut se réécrire sous la forme : $\sum\limits_{k\geq0}\dfrac{(1/x)^k}{k!}$.
Il s'agit de la série exponentielle de paramètre $1/x$.
Elle converge et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{-k}}{k!}=e^{1/x}.$$

b)$f(x)=xe^{1/x}=x\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^{-k}}{k!}=x\left(\dfrac{x^0}{0!}+\dfrac{x^{-1}}{1!}+\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\dfrac{x^{-k}}{k!}\right)$

$$= x\left(1+\frac{1}{x}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{-k}}{k!}\right) = x+1+x\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{-k}}{k!} = x+1+\frac{1}{x}\times x^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{-k}}{k!}.$$

Enfin, en rentrant x^2 dans la somme :

$$f(x) = x+1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!}.$$

6)a)Soit $x \geq 1$.

a)• $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!}$ est une somme dont tous les termes sont positifs.

Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \geq \frac{x^{2-2}}{2!}$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \geq \frac{1}{2}$.

• $x \geq 1$ donc $0 < \dfrac{1}{x} \leq 1$.

Pour $k \geq 2$, la fonction $t \mapsto t^{k-2}$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$ donc $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{k-2} \leq 1$,

c'est-à-dire $x^{2-k} \leq 1$.

On a donc $\forall k \geq 2,\ \dfrac{x^{2-k}}{k!} \leq \dfrac{1}{k!}\quad (1)$

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k!} = \sum_{k\geq 2}\frac{1^k}{k!}$ converge car c'est une série exponentielle (tronquée) de paramètre 1.

En sommant les inégalités (1) pour k allant de 2 à $+\infty$, on a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}.$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = e^1 = e$. Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$.

Finalement, on a : $\displaystyle\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$.

b)En divisant membre à membre les inégalités ci-dessus par x, on a :

$\displaystyle\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x}$, puis en utilisant 5)b) :

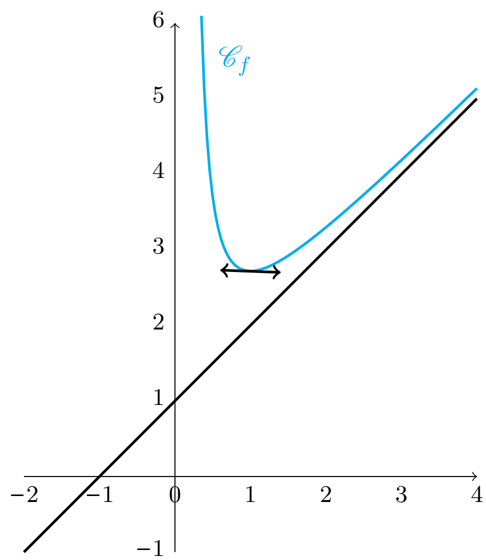
$$\frac{1}{2x} \leq f(x)-(x+1) \leq \frac{e}{x}\quad (*)$$

7) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{x} = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)=0$.

Cela signifie que $f(x)-(x+1)\underset{+\infty}{=}o(1)$, c'est-à-dire : $f(x)\underset{+\infty}{=}x+1+o(1)$.

8)La droite d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
Les variations de f sont données par la question 4).



Partie C :

9)a)Pour tout $k\in\mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)&=\ln\left(u_k e^{1/u_k}\right)-\ln(u_k)\\&=\ln(u_k)+\ln\left(e^{1/u_k}\right)-\ln(u_k)\\&=\frac{1}{u_k}.\end{aligned}$$

b)Soit $n\in\mathbf{N}^*$.

En sommant les égalités précédentes pour k allant de 0 à $n-1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\big(\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)\big)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}.$$

Par télescopage, on a :

$\sum_{k=0}^{n-1}\big(\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)\big)=\ln(u_n)-\ln(u_0)=\ln(u_n)$ car $u_0=1$.

On conclut que $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \ln(u_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}$.

10)a)La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $u_0 = 1$ donc $\forall k \in \mathbf{N},\ u_k \geq 1$.
Il est alors valide d'utiliser $(*)$ avec $x \to u_k$, ce qui donne :
$\forall k \in \mathbf{N},\ \dfrac{1}{2u_k} \leq f(u_k) - \left(u_k + 1\right) \leq \dfrac{e}{u_k}$.
Et comme $f(u_k) = u_{k+1}$, on déduit immédiatement :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ 1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}.$$

b)Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
• En sommant les égalités ci-dessus pour k allant de 0 à $n-1$, on a :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2u_k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{e}{u_k}\right)$.
Calculons chacune des sommes.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2u_k} = n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}$,
Par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n - 1$,
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{e}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{e}{u_k} = n + e\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}$.
En remplaçant, on conclut :

$$n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}.$$

• En ajoutant membre à membre par $1 - n$, on a :
$\displaystyle 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k} \leq u_n - n \leq 1 + e\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}$.
Enfin, en appliquant 9)b) :

$$1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e\ln(u_n).$$

11)a)On sait d'après la question 1)c) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Par croissances comparées, on a par ailleurs : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$.
On déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.
b)En divisant membre à membre la deuxième inégalité 10)b) par u_n, on a :

$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{2}\times\frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq 1 - \frac{n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n} + e\times\frac{\ln(u_n)}{u_n}.$$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \times \frac{\ln(u_n)}{u_n}\right) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_n} + e \times \frac{\ln(u_n)}{u_n}\right) = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{n}{u_n}\right) = 0$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{u_n} = 1$, ce qui signifie que $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

12) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \ln(u_n)$ d'après 9)b)

$$= \ln\left(\frac{u_n}{n} \times n\right)$$
$$= \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) + \ln(n)$$

Or, $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$, puis $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = 0$.

On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \underset{+\infty}{=} o(1) + \ln(n)$, ce qui entraîne que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

> Remarque
>
> A partir de l'équivalent $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$, il aurait été prématuré de conclure que $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
>
> En effet, on n'a pas le droit d'appliquer une fonction de part et d'autre d'un équivalent.

Exercice 2 (eml 2025)

Partie A :

1)$\mathscr{E}$ = Vect(I, J, K) donc (I, J, K) est une famille génératrice de $\mathscr{E}$.

De plus, pour tous réels a, b et c, on a :

$aI + bJ + cK = 0$

$\iff a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} a+c & b & b \\ b & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\iff a = b = c = 0.$

Donc (I, J, K) est libre.

(I, J, K) est une famille libre et génératrice de $\mathscr{E}$, c'est donc une base de $\mathscr{E}$ et $dim\mathscr{E} = 3$.

2)J et K sont symétriques donc diagonalisables.

3)a)$J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2J$.

b)Posons $P(X) = X^3 - 2X$.
D'après la question précédente, $P(J) = J^3 - 2J = 0$. Donc P est un polynôme annulateur de J.

De plus, $P(x) = 0 \iff x(x^2 - 2) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 = 2$
$\iff x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

D'après le cours, les valeurs propres de J sont à chercher parmi les racines de P. Ainsi, $sp(J) \subset \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

4)a)$JU_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}U_1$.

De plus, U_1 est non nul. Donc U_1 est un vecteur propre de J associé à $\sqrt{2}$.

$JU_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0U_2$.

De plus, U_2 est non nul. Donc U_2 est un vecteur propre de J associé à 0.

> Remarque
> Avoir trouvé U_1 non nul tel que $JU_1 = \sqrt{2}U_1$ montre que $E_{\sqrt{2}}(J) \neq \{0\}$ et confirme que $\sqrt{2}$ est valeur propre de J.
> Même remarque pour U_2.

b)En s'inspirant du calcul fait pour U_1, on peut prendre $U_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a alors : $JU_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2}U_3$.

U_3 est non nul. Donc U_3 est un vecteur propre de J associé à $-\sqrt{2}$.

> Remarques
> 1)Comme pour la remarque précédente, avoir trouvé U_3 non nul tel que $JU_3 = -\sqrt{2}U_3$ montre que $E_{-\sqrt{2}}(J) \neq \{0\}$ et confirme que $-\sqrt{2}$ est valeur propre de J.
> 2)Si on manque d'idées pour deviner U_3, on peut toujours poser $U_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et résoudre le système issu de l'égalité $JU_3 = -\sqrt{2}U_3$.

5)a)U_1, U_2 et U_3 sont des vecteurs propres de J associés à des valeurs propres différentes. D'après le cours, la famille (U_1, U_2, U_3) est libre.

C'est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Cette famille a un cardinal égal à 3 qui coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

b)Construisons la matrice P de sorte que ses colonnes soient U_1, U_2 et U_3.

C'est-à-dire : $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

P est inversible car c'est la matrice de passage entre la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et la base (U_1, U_2, U_3).

Posons $D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Les égalités matricielles $JU_1 = \sqrt{2}U_1$, $JU_2 = 0U_2$ et $JU_3 = -\sqrt{2}U_3$ se synthétisent alors en l'égalité : $JP = PD$, c'est-à-dire : $P^{-1}JP = D$.

> Remarque
> On pouvait aussi évoquer le fait que J est diagonalisable, comme matrice de taille 3 ayant 3 valeurs propres distinctes.
> D'après le cours, il existe alors P inversible et D diagonale telles que $J = PDP^{-1}$, les colonnes de P étant formées des bases des sous-espaces propres de J, la diagonale de D formée des valeurs propres de J.

6)a)On trouve immédiatement $KU_1 = 1U_1$, $KU_2 = -1U_2$ et $KU_3 = 1U_3$.

U_1, U_2 et U_3 sont non nuls. Ce sont des vecteurs propres de K associés respectivement à 1, -1 et 1.

C'est par ailleurs une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ d'après la question 5)a).

C'est donc finalement une base de vecteurs propres de K.

b)Posons $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De nouveau, les égalités $KU_1 = 1U_1$, $KU_2 = -1U_2$ et $KU_3 = 1U_3$ se résument matriciellement en l'égalité $KP = P\Delta$, c'est-à-dire $P^{-1}KP = \Delta$.

On a donc $P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7)a)Par énoncé, on a : $M = aI + bJ + cK$.

On déduit en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= P^{-1}\big(aI + bJ + cK\big)P \\ &= aP^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP \\ &= aI + bD + c\Delta \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.
Ainsi, M est semblable à cette matrice diagonale. Elle a donc les mêmes valeurs propres, à savoir $a + b\sqrt{2} + c$, $a - c$ et $a - b\sqrt{2} + c$.

> Remarque
> Rien ne dit que ces valeurs propres soient deux à deux distinctes !

8)a)Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

$s(I) = s(1I + 0J + 0K) = (1, 1, 1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$,

$s(J) = s(0I + 1J + 0K) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = \sqrt{2}e_1 + 0e_2 - \sqrt{2}e_3$,

$s(K) = s(0I + 0J + 1K) = (1, -1, 1) = 1e_1 - 1e_2 + 1e_3$.

Donc $S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

b)On transforme S par les opérations de Gauss.

$S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{array}.$$

On obtient une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls.

S est donc inversible.
Comme $S = \mathscr{M}_{(I,J,K)}(s)$, on conclut que s est bijective.

> Remarque
> On pouvait aussi calculer $Ker(s)$ et voir que $Ker(s) = \{0\}$.

Partie B :

9)Programme :

```
def voisins(A,i):
    n=len(A[i])
    V=[]
    for j in range(n):
        if j!=1 and A[i,j]!=0:
            V.append(j)
    return V
```

> Remarque
> Un graphe *simple* est un graphe où il n'y a qu'une seule arête entre deux sommets distincts et où il n'y a aucune boucle.
> Ici, l'énoncé ne dit rien à ce sujet.
> Si le graphe est simple, la matrice d'adjacence A n'est composée que de 0 et de 1, on peut donc remplacer la commande `A[i,j]!=0` par `A[i,j]=1`.

10)Programme :

```
def min_ext(L):
    m=0
    while m in L:
        m=m+1
    return m
```

11)Programme :

```
def coloration(A):
    n=len(A[0])
    C=[k for k in range(n)]
    for i in range(1,n):
        C_voisins=[C[j] for j in voisins(A,i)]
        C[i]=min_ext(C_voisins)
    return C
```

12)a)Le graphe comporte $n = 6$ sommets. Avant la boucle : C=[0,1,2,3,4,5].

Puis, on parcourt la boucle pour i allant de 1 à 5.

$\boxed{i = 1}$

Les voisins de s_1 sont donnés par la liste : voisins(A,1)=[0,2,5]
Puis, la couleur de ces voisins est donnée par la liste : C_voisins=[0,2,5]
Enfin, on cherche le plus petit entier naturel n'appartenant à cette liste, c'est 1. Donc $C[1] = 1$.
Ainsi, C n'a pas changé et vaut toujours : C=[0,1,2,3,4,5].

$\boxed{i = 2}$

Les voisins de s_2 sont donnés par la liste : voisins(A,2)=[1,3,5]
Puis, la couleur de ces voisins est donnée par la liste : C_voisins=[1,3,5]
Enfin, on cherche le plus petit entier naturel n'appartenant à cette liste, c'est 0. Donc $C[2] = 0$.
Cette fois-ci, C a changé et vaut : C=[0,1,0,3,4,5].

$\boxed{i = 3}$

Les voisins de s_3 sont donnés par la liste : voisins(A,3)=[0,2,4]
Puis, la couleur de ces voisins est donnée par la liste : C_voisins=[0,0,4]
Enfin, on cherche le plus petit entier naturel n'appartenant à cette liste, c'est 1. Donc $C[3] = 1$.
C change donc et vaut : C=[0,1,0,1,4,5].

$\boxed{i = 4}$

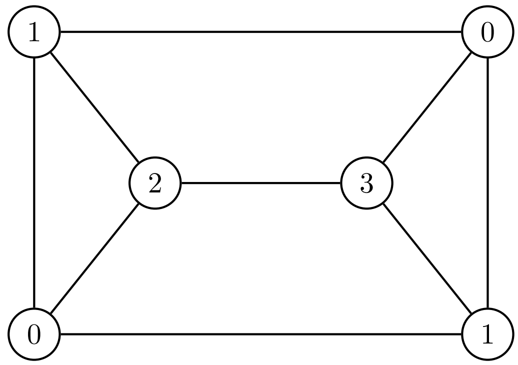
Les voisins de s_3 sont donnés par la liste : voisins(A,4)=[0,3,5]
Puis, la couleur de ces voisins est donnée par la liste : C_voisins=[0,1,5]
Enfin, on cherche le plus petit entier naturel n'appartenant à cette liste, c'est 2. Donc $C[4] = 2$.
C change donc et vaut : C=[0,1,0,1,2,5].

$\boxed{i = 5}$

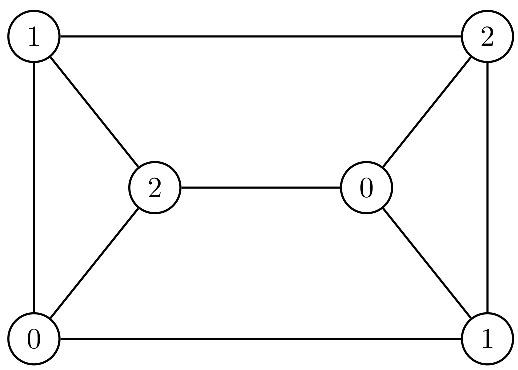
Les voisins de s_3 sont donnés par la liste : voisins(A,5)=[1,2,4]
Puis, la couleur de ces voisins est donnée par la liste : C_voisins=[1,0,2]
Enfin, on cherche le plus petit entier naturel n'appartenant à cette liste, c'est 3. Donc $C[5] = 3$.
C change donc et vaut : C=[0,1,0,1,2,3].

En conclusion, la fonction `coloration(A)` renvoie la liste [0,1,0,1,2,3].

b)Le programme précédent a permis d'obtenir la coloration à 4 couleurs ci-dessous et réalise la contrainte souhaitée, à savoir que deux sommets voisins sont de couleurs différentes :



Cependant, ce programme ne fournit pas de coloration à 3 couleurs.
Pourtant, le graphe G en possède une, comme le montre le dessin ci-dessous :



Exercice 3 (eml 2025)

Partie A :

1)a)La fonction $g : u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}} = u^{-1/2}$ est dérivable sur $]0,1]$ comme inverse d'une fonction dérivable dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall u \in]0,1],\ g'(u) = -\dfrac{1}{2}u^{-3/2} < 0.$

g est strictement décroissante et continue (car dérivable) sur $]0,1]$.

Elle réalise une bijection de $]0,1]$ sur $g(]0,1]) = [g(1), \lim\limits_{u\to 0^+} g(u)[= [1,+\infty[$.

Ainsi, comme $U(\Omega) =]0,1]$, on a alors : $V(\Omega) = [1,+\infty[$.

b)Par définition, $\forall x \in \mathbf{R},\ F_V(x) = P(V \leq x)$.

On distingue deux cas :

• $x < 1$

L'événement $(V \leq x)$ est alors inclus dans l'événement $(V < 1)$, lequel est vide puisque $V(\Omega) = [1,+\infty[$.

Donc $F_V(x) = 0$.

• $x \geq 1$

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) \\ &= P\left(\frac{1}{\sqrt{U}} \leq x\right) \\ &= P\left(\sqrt{U} \geq \frac{1}{x}\right) \quad \text{par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\\ &= 1 - P\left(\sqrt{U} < \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - P\left(U < \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{par croissance de la fonction carrée sur }]0,+\infty[\\ &= 1 - F_U\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

De plus, comme $U \hookrightarrow \mathscr{U}(]0,1])$, on a :

$$F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Or, $x^2 \geq 1$ donc $\dfrac{1}{x^2} \in]0,1]$, ce qui entraine que $F_U\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2}$.

On a donc finalement : $F_V(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

On conclut que $F_V(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

c)• F_V est continue sur $[1, +\infty[$ comme différence et inverse de fonctions continues. F_V est continue sur $]-\infty, 1]$ comme fonction nulle.
De plus, $\lim\limits_{x \to 1^-} F_V(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 0 = 0$.

De plus, $F_V(1) = 1 - \dfrac{1}{1^2} = 0$.

On a donc $\lim\limits_{x \to 1^-} F_V(x) = F_V(1)$, ce qui montre que F_V est continue à gauche en 1.

Par ailleurs, F_V est continue à droite en 1 puisqu'elle est continue sur $[1, +\infty[$. Donc F_V est continue en 1.

Finalement, F_V est continue sur $\mathbf{R}$.

F_V est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ comme différence et inverse de fonctions de classe C^1. F_V est de classe C^1 sur $]-\infty, 1]$ comme fonction nulle.
F_V est donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 1.

On conclut que V est une variable aléatoire à densité.

• Une densité f_V de V s'obtient en dérivant F_V aux points où elle est dérivable, c'est-à-dire pour $x \neq 1$ et en prenant une valeur arbitraire positive ou nulle pour $x = 1$.

On a donc $\forall x \neq 1,\ f_V(x) = F_V'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \\ \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

En prenant par exemple $f_V(1) = 0$, on, obtient finalement :

$$f_V(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \\ \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Remarque
On aurait tout aussi bien pu prendre $f_V(1) = 2$ pour recoller avec la première formule, ce qui aurait donné :

$$f_V(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Une densité n'est pas unique !

2)• V admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf_V(x)|dx$ converge.
Comme $x \mapsto xf_V(x)$ est nulle sur $]-\infty, 1]$ et positive sur $]1, +\infty[$, on est ramené à étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf_V(x)dx$.
Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf_V(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}dx$ converge car elle a même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$, laquelle converge car $2 > 1$.
Donc V admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(V) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_V(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}dx \\
&= \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{2}{x^2}dx \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{2}{x}\right]_1^A \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{2}{A} + 2\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

• D'après le théorème de transfert, V^2 admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 f_V(x)|dx$ converge.
Comme $x \mapsto x^2 f_V(x)$ est nulle sur $]-\infty, 1]$ et positive sur $]1, +\infty[$, on est ramené à étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 f_V(x)dx$.
Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 f_V(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x}dx$ diverge car elle a même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$, laquelle diverge.
Donc V n'admet pas d'espérance et n'admet donc pas non plus de variance.

Partie B :

3)a)Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}
Fn(x) &= P(M_n \leq x) \\
&= P\left((V_1 \leq x) \cap ... \cap (V_n \leq x)\right) \quad \text{par propriété du max} \\
&= P(V_1 \leq x) \times \cdots \times P(V_n \leq x) \quad \text{par indépendance mutuelle des } V_i \\
&= F_V(x) \times \cdots \times F_V(x) \quad \text{car les } V_i \text{ ont même loi que } V
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R},\ F_n(x) = F_V(x)^n$, c'est-à-dire que $F_n = (F_V)^n$.

b)On a donc : $F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n & \text{si } x \geq 1 \\ \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Cherchons $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$ en distinguant deux cas :

• $x < 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0.$

• $x \geq 1$

On a alors : $0 < \dfrac{1}{x^2} \leq 1$, puis $0 \leq 1 - \dfrac{1}{x^2} < 1$.

On déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

c)Supposons que $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z.

Notons $\mathscr{E}$, l'ensemble des réels où F_Z est continue.

D'après la définition de la convergence en loi, on a :

$\forall x \in \mathscr{E}, \ \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = F_Z(x)$.

En utilisant la question précédente, on a donc :

$$\forall x \in \mathscr{E}, \ F_Z(x) = 0 \quad (*).$$

Distinguons trois cas :

• Z est à densité

Alors, F_Z est continue sur $\mathscr{E} = \mathbf{R}$.

D'après $(*)$, on déduit : $\forall x \in \mathbf{R}, \ F_Z(x) = 0$.

En passant à la limite, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} F_Z(x) = 0$.

En tant que fonction de répartition, F_Z doit vérifier : $\lim\limits_{x \to +\infty} F_Z(x) = 1$, ce qui mène à une contradiction.

• $Z(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbf{Z}$

Z est alors discrète finie. Posons $Z(\Omega) = \{z_1, ..., z_n\}$ avec $z_1 < ... < z_n$.

D'après le cours, F_Z est continue sur $\mathscr{E} = \mathbf{R} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ donc sur $]z_n, +\infty[$.

D'après $(*)$, on a alors : $\forall x > z_n, \ F_Z(x) = 0$.

En passant à la limite, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} F_Z(x) = 0$.

Ce qui contredit de nouveau le fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_Z(x) = 1$.

• $Z(\Omega)$ est une partie infinie de $\mathbf{Z}$.

Z est alors discrète infinie.

D'après le cours, F_Z est continue sur $\mathscr{E} = \mathbf{R} \setminus Z(\Omega)$.

D'après $(*)$, on a : $\forall x \in \mathbf{R} \setminus Z(\Omega), \ F_Z(x) = 0 \quad (1)$

Soit $x \in Z(\Omega)$. Comme $Z(\Omega)$ est dénombrable, il existe un réel $y \geq x$ tel que $y \notin Z(\Omega)$.
Par croissance de F_Z, on a alors : $F_Z(x) \leq F_Z(y)$.

Puis par positivité de la fonction de répartition : $0 \leq F_Z(x) \leq F_Z(y)$.

Comme $y \notin Z(\Omega)$, on a $F_Z(y) = 0$, d'où $F_Z(x) = 0$.

Ainsi, $\forall x \in Z(\Omega),\ F_Z(x) = 0 \quad (2)$

De (1) et (2), on déduit que $\forall x \in \mathbf{R},\ F_Z(x) = 0$.

En passant à la limite, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} F_Z(x) = 0$.

Ce qui contredit de nouveau le fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_Z(x) = 1$.

> Remarque
> Je n'ai pas traité le cas où X n'est ni à densité, ni discrète. Cela sort du cadre du programme.
> Cette question est trop difficile, l'énoncé aurait du préciser : « Justifier que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire <u>à densité</u> ».

4)a)Soit $x > 0$. Prenons n suffisamment grand, de sorte que $x\sqrt{n} \geq 1$.

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \\
&= P\left(M_n \leq x\sqrt{n}\right) \\
&= F_n\left(x\sqrt{n}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{(x\sqrt{n})^2}\right)^n \quad \text{car } \forall t \geq 1,\ F_n(t) = \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \\
&= exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Comme $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{nx^2} = 0$, on déduit :

$\ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{nx^2}$, puis : $n \ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

b)Soit $x \in \mathbf{R}$. Distinguons deux cas :

- $x > 0$

On a montré en 4)a) que $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = F_W(x)$.

- $x \leq 0$

$G_n(x) = F_n \underbrace{\left(x\sqrt{n}\right)}_{<0} = 0$ car F_n est nulle sur $]-\infty, 0[$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0 = F_W(x)$.
On a établi que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = F_W(x)$, ce qui prouve que la suite $\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers W.

Partie C :

5)a)`SELECT montant FROM sinistres WHERE annee=2024;`

b)`SELECT mois,annee FROM sinistres WHERE montant>1000000;`

6)`INSERT INTO sinistres VALUES (7652,2025,"avril",1540);`

Partie D :

7)$N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ donc $N(\Omega) = \mathbf{N}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ P(N = n) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^n}{n!}$.
8)$T(\Omega) = \mathbf{N}$.
9)Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
a)Supposons l'événement $(N = n)$ réalisé. Le nombre de sinistres de l'année vaut donc n.
L'expérience aléatoire est alors constituée de n épreuves (épreuve=sinistre) successives et indépendantes (du fait que V_1,...,V_n sont indépendantes).
A chaque épreuve, la probabilité de succès (succès si le montant du sinistre est $> A$) vaut :

$$P(V > A) = 1 - P(V \leq A) = 1 - F_V(A) = \frac{1}{A^2}.$$

Enfin, T compte le nombre de succès.
Donc la loi conditionnelle de T sachant $(N = n)$ est la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{A^2}\right)$.
b)Soit $k \in \mathbf{N}$.
Calculons $P_{(N=n)}(T = k)$ en distinguant deux cas :
- $k \leq n$

Grâce à la question précédente, on a : $P_{(N=n)}(T = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$.
- $k > n$

Le nombre de sinistres dont le montant est $> A$ ne peut pas dépasser le nombre total de sinistres.
Donc $P_{(N=n)}(T = k) = 0$.
10)Soit $k \in \mathbf{N}$. La formule des probabilités totales pour le système complet $(N = n)_{n\in\mathbf{N}}$ donne :

$$P(T=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P_{(N=n)}(T=k)P(N=n)$$
$$=\sum_{n=0}^{k-1}P_{(N=n)}(T=k)P(N=n)+\sum_{n=k}^{+\infty}P_{(N=n)}(T=k)P(N=n)$$

Dans la première somme, $n<k$ donc $P_{(N=n)}(T=k)=0$. On poursuit :

$$\begin{aligned}
P(T=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{A^2}\right)^k\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{n-k}e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^n}{n!}\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{1}{A^2}\right)^k\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{n-k}e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^n}{n!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\times\left(\frac{1}{A^2}\right)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-k)!}\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{n-k}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\times\left(\frac{1}{A^2}\right)^k\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{j+k}}{j!}\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{j} \quad \text{en posant } j=n-k\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\times\lambda^k\times\left(\frac{1}{A^2}\right)^k\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left(\lambda\left(1-\frac{1}{A^2}\right)\right)^j}{j!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\times\lambda^k\times\left(\frac{1}{A^2}\right)^k\times e^{\lambda\left(1-\frac{1}{A^2}\right)} \quad \text{grâce à la série exponentielle}\\
&= e^{-\lambda/A^2}\frac{\left(\lambda/A^2\right)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Donc $T\hookrightarrow\mathscr{P}\left(\lambda/A^2\right)$.

11)Cela correspond à l'espérance de T, c'est-à-dire λ/A^2.