Correction DS3

Exercice (eml 2021 - sans la partie C)

Partie A

1)φ est continue sur $]-\infty,1[$ comme somme, produit et composée de fonctions continues.

De plus, $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)=\lim\limits_{t\to0^+}t\ln t=0$ par croissances comparées.

$\lim\limits_{x\to1^-}x=1$. Par somme, $\lim\limits_{x\to1^-}\varphi(x)=1=\varphi(1)$.

Donc φ est continue à gauche en 1.

On conclut que φ est continue sur $]-\infty,1]$.

2)a)φ est de classe C^1 sur $]-\infty,1[$ comme somme, produit et composée de fonctions de classe C^1.

Pour tout $x<1$, on a :

$\varphi'(x)=1+(-1)\times\ln(1-x)+(1-x)\times\left(\dfrac{-1}{1-x}\right)=-\ln(1-x)$.

b)$\varphi'(x)\geq0\iff\ln(1-x)\leq0\iff1-x\leq1\iff x\geq0$.

Donc φ est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,1[$.

> Remarque
> φ étant continue en 1 et croissante sur $[0,1[$, elle est également croissante sur $[0,1]$.

c)Pour tout $x<1$, on a :

$\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\dfrac{x+(1-x)\ln(1-x)-1}{x-1}=\dfrac{x-1-(x-1)\ln(1-x)}{x-1}$

$=\dfrac{(x-1)\big(1-\ln(1-x)\big)}{x-1}=1-\ln(1-x)$.

$\lim\limits_{x\to1^-}\ln(1-x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=+\infty$.

Donc φ n'est pas dérivable (à gauche) en 1.

> Remarque
> $\mathscr{C}_\varphi$ admet donc une tangente verticale d'équation $x=1$.

3)Quand $x\to-\infty$, on a une forme indéterminée du type $(-\infty)+(+\infty)$.

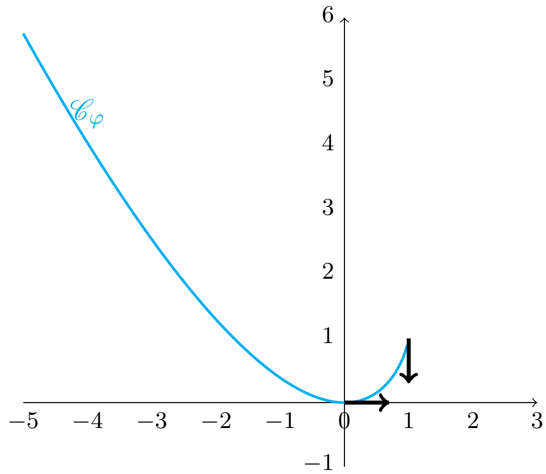
Posons $t=1-x$ ou $x=1-t$. Quand $x\to-\infty$, $t\to+\infty$.

Puis, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}(1-t+t\ln t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\big(1+t(\ln t-1)\big)$.

Or, $\lim\limits_{t\to+\infty}t=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}(\ln t-1)=+\infty$.

Par produit, $\lim\limits_{t\to+\infty}t(\ln t-1)=+\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$.

4)Courbe.



5)a)L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln t dt$ est impropre en 0.

Soit $x \in]0,1]$. Faisons une IPP sur $\displaystyle\int_x^1 t\ln t dt$ en posant :

$u'(t) = t \qquad v(t) = \ln t$

$u(t) = \dfrac{t^2}{2} \qquad v'(t) = \dfrac{1}{t}$

u et v sont de classe C^1 sur $[x,1]$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}
\int_x^1 t\ln t dt &= \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}dt \\
&= 0 - \frac{x^2}{2}\ln x - \int_x^1 \frac{t}{2}dt \\
&= -\frac{x^2}{2}\ln x - \left[\frac{t^2}{4}\right]_x^1 \\
&= -\frac{x^2}{2}\ln x - \left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{4}\right) \\
&= -\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}+\frac{x^2}{4}.
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{4} = 0$.

Par somme, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 t\ln t dt = -\frac{1}{4}$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 t\ln t dt$ converge et vaut $-\dfrac{1}{4}$.

b)L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)dx$ est impropre en 1.

Soit $A \in [0,1[$. On effectue un changement de variable dans $\displaystyle\int_0^A \varphi(x)dx$ en posant : $t = 1 - x$.

• $t = 1 - x \Longleftrightarrow x = \underbrace{1 - t}_{\psi(t)}$.

• bornes :
$x = 0 \Longleftrightarrow t = 1$
$x = A \Longleftrightarrow t = 1 - A$

• fonction :
$\varphi(x) = 1 - t + t\ln t$.

• élément différentiel :
$dx = \psi'(t)dt = -1dt$.

ψ est affine donc de classe C^1 sur $[1-A, 1]$. La formule de changement de variable est licite et donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \varphi(x)dx &= \int_1^{1-A} (1 - t + t\ln t) \times (-1)dt \\
&= \int_{1-A}^1 (1 - t + t\ln t)\, dt \\
&= \int_{1-A}^1 (1-t)dt + \int_{1-A}^1 t\ln t dt \\
&= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{1-A}^1 (1-t)dt + \int_{1-A}^1 t\ln t dt \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left((1-A) - \frac{(1-A)^2}{2}\right) + \int_{1-A}^1 t\ln t dt \\
&= -\frac{1}{2} + A - \frac{(1-A)^2}{2} + \int_{1-A}^1 t\ln t dt.
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{A\to 1^-}\left(-\frac{1}{2} + A - \frac{(1-A)^2}{2} + \int_{1-A}^1 t\ln t dt\right) = \frac{1}{2} + \int_0^1 t\ln t dt$
$\displaystyle= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to 1^-}\int_0^A \varphi(x)dx = \frac{1}{4}$.

On conclut que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{4}$.

Partie B

6)a)Comme $x \in [0,1[$ et que $t \in [0,x]$, on a bien $t \neq 1$.
La formule sur la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique donne alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}.$$

D'où, $\displaystyle \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{t^n}{1-t}$.

b)En intégrant l'égalité ci-dessus entre les bornes croissantes 0 et x, on a :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Puis, par linéarité :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \quad (*).$$

Calculons maintenant les deux premières intégrales.

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \big[-\ln(1-t) \big]_0^x = -\ln(1-x).$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k dt \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \quad \text{en posant } j = k+1, \text{ puis en renommant } j \text{ en } k.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans $(*)$, on conclut :

$$-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

7)• Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Pour $t \in [0,x]$, on a : $t \leq x$, puis $-t \geq -x$ et $1-t \geq 1-x > 0$.

Par passage à l'inverse, on déduit : $\forall t \in [0,x],\ 0 < \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-x}$.

En multipliant par $t^n \geq 0$, on a $\forall t \in [0, x],\ 0 < \dfrac{t^n}{1-t} \leq \dfrac{t^n}{1-x}$.
En intégrant entre les bornes croissantes 0 et x, on a :
$0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt$
avec $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$.
Donc $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \quad (*)$.
Enfin, comme $0 \leq x < 1$, on a : $x^{n+1} \leq 1$.
En multipliant par $\dfrac{1}{(n+1)(1-x)} > 0$, on déduit : $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \leq \dfrac{1}{(n+1)(1-x)}$.
En recollant avec $(*)$, on déduit :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}.$$

• Comme $x \in [0, 1[$ est fixé, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)(1-x) = +\infty$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{(n+1)(1-x)} = 0$.
D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0$.
8)L'égalité 6)b) peut se réécrire sous la forme :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt.$
On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.
Cela signifie que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

> Remarque
> On a : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \dfrac{x^n}{n} \leq x^n$. De plus, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ converge puisque son paramètre $x \in [0, 1[$.
> Le critère de comparaison assure alors la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$, mais ne permet pas de calculer sa somme !

9)a)$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \dfrac{n+1}{n(n+1)} - \dfrac{n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

b)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x^{k+1}}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= x\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k}}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x^{j}}{j} \\
&= x\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k}}{k} - \left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{x^{j}}{j} - \frac{x^1}{1}\right) \\
&= x\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k}}{k} - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x^{j}}{j} + \frac{x^{n+1}}{n+1} - x\right) \\
&= (x-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k}}{k} - \frac{x^{n+1}}{n+1} + x \quad \text{en renommant } j \text{ en } k.
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ d'après la question 8).

$\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ car $0 \leq x < 1$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$.

Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = 0$.

On déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^{k+1}}{k(k+1)} = -(x-1)\ln(1-x) + x = \varphi(x)$.

Cela signifie que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.

10)La question précédente ne peut pas être appliquée pour $x = 1$ car dans tous les calculs, on a supposé que $x < 1$.

En revanche, d'après la question 9)a), la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ peut se réécrire sous la forme $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$. C'est une série télescopique.

Elle converge car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Sa somme vaut :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{par télescopage}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1\\
&= \varphi(1).
\end{aligned}$$

Exercice 2 (edhec 2020)

1)$\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ est une partie non vide de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ car $0 \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ du fait que ${}^t0 = 0 = -0$.

Pour toutes matrices U et V de $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ et tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda U + V) &= \lambda {}^tU + {}^tV \text{ par linéarité de la transposition} \\ &= \lambda(-U) + (-V) \text{ car } U \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R}) \text{ et } V \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R}) \\ &= -(\lambda U + V). \end{aligned}$$

Donc $\lambda U + V \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

On conclut que $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2)a)Soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

$$\begin{aligned} {}^tf(M) &= {}^t\big[({}^tA)M + MA\big] \\ &= {}^t(({}^tA)M) + {}^t(MA) \\ &= {}^tM{}^t({}^tA) + {}^tA{}^tM \text{ car } {}^t(BC) = {}^tC{}^tB \\ &= {}^tMA + {}^tA{}^tM \text{ car } t({}^tA) = A \\ &= (-M)A + {}^tA(-M) \text{ car } M \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R}) \\ &= -\big[MA + {}^tAM\big] \\ &= -f(M). \end{aligned}$$

Donc $f(M) \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

2)b)Pour toutes matrices U et V de $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ et tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda U + V) &= ({}^tA)(\lambda U + V) + (\lambda U + V)A \\ &= \lambda({}^tA)U + ({}^tA)V + \lambda UA + VA \\ &= \lambda\big[({}^tA)U + UA\big] + ({}^tA)V + VA \\ &= \lambda f(U) + f(V). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Par ailleurs, elle est « endo » grâce à la question 2)a). Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

3)a)Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

$M \in \mathscr{A}_3(\mathbf{R})$

$\iff {}^tM = -M$

$$\iff \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a &=& -a \\ d &=& -b \\ g &=& -c \\ b &=& -d \\ e &=& -e \\ h &=& -f \\ c &=& -g \\ f &=& -h \\ i &=& -i \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 0 \\ e &=& 0 \\ i &=& 0 \\ g &=& -c \\ d &=& -b \\ h &=& -f \end{array}\right.$$

On déduit :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_3(\mathbf{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b,c,f) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, (b,c,f) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(J,K,L).\end{aligned}$$

Donc la famille $\mathscr{B} = (J,K,L)$ est une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbf{R})$.

3)b)Pour tous réels a, b et c, on a :

$aJ + bK + cL = 0$

$$\Longleftrightarrow a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow a = b = c = 0.$

Donc la famille $\mathscr{B} = (J,K,L)$ est libre.

$\mathscr{B}$ est une famille libre et génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbf{R})$, c'est donc une base de $\mathscr{A}_3(\mathbf{R})$. Ainsi, $dim\big(\mathscr{A}_3(\mathbf{R})\big) = 3$.

4)a)
$$\begin{aligned}f(J) &= ({}^tA)J + JA\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= -J - L.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(K) &= ({}^tA)K + KA\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(L) &= ({}^tA)L + LA\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= -L.\end{aligned}$$

4)b)
$$\begin{aligned}Imf &= \mathrm{Vect}\big(f(J), f(K), f(L)\big) \text{ car } (J,K,L) \text{ est une base de } \mathscr{A}_3(\mathbf{R})\\
&= \mathrm{Vect}\big(-J-L, 0, -L\big)\\
&= \mathrm{Vect}\big(-J-L, -L\big)\\
&= \mathrm{Vect}\big(J+L, L\big)\\
&= \mathrm{Vect}\big(J, L\big) \text{ car } J = (J+L) - L\end{aligned}$$

(J,L) est donc une famille génératrice de Imf. C'est aussi une famille libre car J et L ne sont pas proportionnelles. Donc (J,L) est une base de Imf.

4)c)On déduit que $dim\big(Imf\big) = 2$.

Le théorème du rang donne alors :

$dim\big(Kerf\big) = dim\big(\mathscr{A}_3(\mathbf{R})\big) - dim\big(Imf\big) = 3 - 2 = 1$.

Or, $f(K) = 0$ donc $K \in Kerf$.
(K) est une famille libre de $Kerf$ car constituée d'un seul vecteur non nul.
Son cardinal vaut 1 et coïncide avec la dimension de $Kerf$.
C'est donc une base de $Kerf$.

5)a)On a vu dans la question 4)a) que :

$f(J) = -1J + 0K - 1L$, $f(K) = 0J + 0K + 0L$ et $f(L) = 0J + 0K - 1L$.

Donc $F = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5)b)F est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, c'est-à-dire 0 et -1.

5)c)• $rg(F) = rg(f) = dimImf = 2$.

Par ailleurs, $F + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } rg(F+I) &= dimVect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= dimVect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= 2 \quad \text{car la famille est libre} \end{aligned}$$

• Le cours donne pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$dimE_\lambda(F) + rg(F - \lambda I) = 3 \quad (*)$$

On déduit :

$dimE_0(F) = 3 - rg(F) = 1$ et $dimE_{-1}(F) = 3 - rg(F+I) = 1$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de F vaut 2.
Or, $F \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Donc F n'est pas diagonalisable, d'après le théorème de réduction.

Remarque
On pouvait aussi calculer $E_0(F)$ et $E_{-1}(F)$, mais l'égalité $(*)$ permet d'aller plus vite.

Exercice 3 (eml 2025)

Partie A :

1)a)Récurrence.
Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n > 0$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 1 > 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par HR, $u_n > 0$. De plus, $e^{1/u_n} > 0$. Par produit, $u_{n+1} > 0$.

On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

b)$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n \left(e^{1/u_n} - 1\right)$.

$u_n > 0$ donc $1/u_n > 0$ et $e^{1/u_n} > 1$. D'où $e^{1/u_n} - 1 > 0$.

Par produit, $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.

c)$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant croissante, elle admet une limite. Cette limite est soit un nombre réel L, soit $+\infty$.
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, on a : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq u_0$, soit $u_n \geq 1$.

Par passage à la limite, on a alors : $L \geq 1 \quad (*)$

De plus, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto xe^{1/x}$.
f est continue sur $\mathbf{R}^*$ donc en L.
D'après le théorème du point fixe, L est un point fixe de f. Elle est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned}
\text{Or, } f(x) = x &\iff xe^{1/x} = x \\
&\iff x\left(e^{1/x} - 1\right) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } e^{1/x} - 1 = 0 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{1}{x} = 0}_{\text{impossible}} \quad .
\end{aligned}$$

0 est donc le seul point fixe de f. Donc $L = 0$, ce qui contredit $(*)$.

On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2)programme

```
import numpy as np
u=1
n=0
while u<10**6:
    u=u*np.exp(1/u)
    n=n+1
print(n)
```

Partie B :

3)• $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{t\to 0} e^t = 1$. Par composition, $\lim_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1$.
$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Par produit, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$. Par composition, $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$.
$\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ est une FI du type $0 \times +\infty$.

Posons $X = \frac{1}{x}$. Quand $x \to 0^+, X \to +\infty$.

Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} e^X = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ par croiss. comparées.

4) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ par produit et composées de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ f'(x) &= 1 \times e^{1/x} + x \times \left(-\frac{1}{x^2} e^{1/x}\right) \\ &= e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x} \\ &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x} \\ &= \frac{x-1}{x} e^{1/x}.\end{aligned}$$

$x > 0$ et $e^{1/x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

t	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

5)a) La série $\sum_{k\geq 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ peut se réécrire sous la forme : $\sum_{k\geq 0} \frac{(1/x)^k}{k!}$.

Il s'agit de la série exponentielle de paramètre $1/x$.

Elle converge et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = e^{1/x}.$$

b) $f(x) = xe^{1/x} = x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = x \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^{-1}}{1!} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}\right)$

$$= x\left(1+\frac{1}{x}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{-k}}{k!}\right) = x+1+x\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{-k}}{k!} = x+1+\frac{1}{x}\times x^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{-k}}{k!}.$$

Enfin, en rentrant x^2 dans la somme :

$$f(x) = x+1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!}.$$

6)a)Soit $x \geq 1$.

a)$\bullet$ $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!}$ est une somme dont tous les termes sont positifs.

Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \geq \frac{x^{2-2}}{2!}$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \geq \frac{1}{2}$.

$\bullet$ $x \geq 1$ donc $0 < \dfrac{1}{x} \leq 1$.

Pour $k \geq 2$, la fonction $t \mapsto t^{k-2}$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$ donc $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{k-2} \leq 1$,

c'est-à-dire $x^{2-k} \leq 1$.

On a donc $\forall k \geq 2,\ \dfrac{x^{2-k}}{k!} \leq \dfrac{1}{k!} \quad (1)$

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k!} = \sum_{k\geq 2}\frac{1^k}{k!}$ converge car c'est une série exponentielle (tronquée) de paramètre 1.

En sommant les inégalités (1) pour k allant de 2 à $+\infty$, on a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}.$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = e^1 = e$. Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$.

Finalement, on a : $\displaystyle\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$.

b)En divisant membre à membre les inégalités ci-dessus par x, on a :

$\displaystyle\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x}$, puis en utilisant 5)b) :

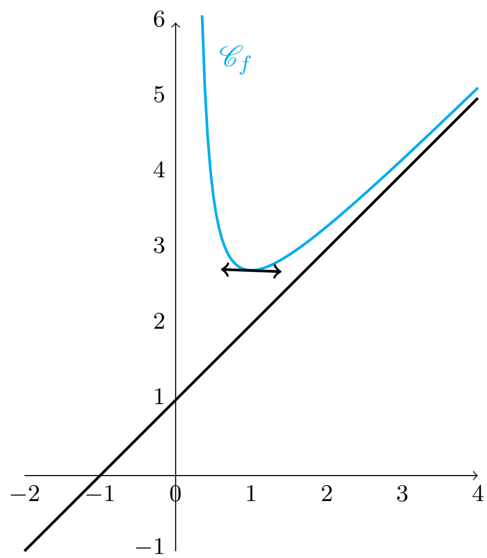
$$\frac{1}{2x} \leq f(x)-(x+1) \leq \frac{e}{x} \quad (*)$$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e}{x} = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x+1)\big) = 0$.

Cela signifie que $f(x) - (x+1) \underset{+\infty}{=} o(1)$, c'est-à-dire : $f(x) \underset{+\infty}{=} x + 1 + o(1)$.

8)La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
Les variations de f sont données par la question 4).



Partie C :

9)a)Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) &= \ln\left(u_k e^{1/u_k}\right) - \ln(u_k) \\
&= \ln(u_k) + \ln\left(e^{1/u_k}\right) - \ln(u_k) \\
&= \frac{1}{u_k}.
\end{aligned}$$

b)Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

En sommant les égalités précédentes pour k allant de 0 à $n-1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \big(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

Par télescopage, on a :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \big(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\big) = \ln(u_n) - \ln(u_0) = \ln(u_n)$ car $u_0 = 1$.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.

10)a)La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $u_0 = 1$ donc $\forall k \in \mathbf{N},\ u_k \geq 1$.

Il est alors valide d'utiliser $(*)$ avec $x \to u_k$, ce qui donne :

$\forall k \in \mathbf{N},\ \frac{1}{2u_k} \leq f(u_k) - \big(u_k + 1\big) \leq \frac{e}{u_k}$.

Et comme $f(u_k) = u_{k+1}$, on déduit immédiatement :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ 1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}.$$

b)Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

• En sommant les égalités ci-dessus pour k allant de 0 à $n-1$, on a :

$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2u_k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{e}{u_k}\right)$.

Calculons chacune des sommes.

$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2u_k} = n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$,

Par télescopage, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n - 1$,

$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{e}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e}{u_k} = n + e\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.

En remplaçant, on conclut :

$$n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

• En ajoutant membre à membre par $1 - n$, on a :

$1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - n \leq 1 + e\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.

Enfin, en appliquant 9)b) :

$$1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e\ln(u_n).$$

11)a)On sait d'après la question 1)c) que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Par croissances comparées, on a par ailleurs : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

On déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

b)En divisant membre à membre la deuxième inégalité 10)b) par u_n, on a :

$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \times \frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq 1 - \frac{n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n} + e \times \frac{\ln(u_n)}{u_n}.$$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \times \frac{\ln(u_n)}{u_n}\right) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_n} + e \times \frac{\ln(u_n)}{u_n}\right) = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{n}{u_n}\right) = 0$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{u_n} = 1$, ce qui signifie que $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

12)$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} &= \ln(u_n) \quad \text{d'après 9)b)}\\ &= \ln\left(\frac{u_n}{n} \times n\right)\\ &= \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) + \ln(n)\end{aligned}$

Or, $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$, puis $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = 0$.

On a donc $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \underset{+\infty}{=} o(1) + \ln(n)$, ce qui entraîne que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

> Remarque
> A partir de l'équivalent $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$, il aurait été prématuré de conclure que $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
> En effet, on n'a pas le droit d'appliquer une fonction de part et d'autre d'un équivalent.