

---

## Correction DS4

### Exercice 1 (edhec 2011)

1)a) Soit  $x > 0$  et  $t \in [0, x]$ .

De l'inégalité  $0 \leq t \leq x$ , on, tire :

$$1 \leq e^t \leq e^x \text{ par croissance de l'exponentielle,}$$

$$2 \leq e^t + 1 \leq e^x + 1,$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{e^t + 1} \geq \frac{1}{e^x + 1} \text{ par décroissance sur } ]0, +\infty[ \text{ de la fonction inverse.}$$

$$\text{Ainsi, } \forall x > 0, \forall t \in [0, x], \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

b) Soit  $x > 0$ .

En multipliant membre à membre les inégalités par  $t \geq 0$ , on a :

$$\frac{t}{e^x + 1} \leq \frac{t}{e^t + 1} \leq \frac{t}{2}.$$

Puis, on intègre entre les bornes croissantes 0 et  $x$  :

$$\int_0^x \frac{t}{e^x + 1} dt \leq \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq \int_0^x \frac{t}{2} dt \quad (*)$$

$$\text{Or, } \int_0^x \frac{t}{e^x + 1} dt = \frac{1}{e^x + 1} \int_0^x t dt = \frac{1}{e^x + 1} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{e^x + 1} \times \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Et } \int_0^x \frac{t}{2} dt = \left[ \frac{t^2}{4} \right]_0^x = \frac{x^2}{4}.$$

On remplace dans (\*) :

$$\frac{1}{e^x + 1} \times \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq \frac{x^2}{4}.$$

On multiplie membre à membre par  $\frac{2}{x^2} > 0$  et on obtient :

$$\forall x > 0, \frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}.$$

D'après la propriété des gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Or, par énoncé, } f(0) = \frac{1}{2}.$$

On a donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$  donc  $f$  est continue à droite en 0.

$$\text{2)a) Soit } \varphi : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt.$$

---

$h : t \mapsto \frac{t}{e^t + 1}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  (quotient de fonctions continues).

D'après le cours,  $\varphi$  est une primitive de  $h$  sur  $[0, +\infty[$ .

$\varphi$  est donc de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$  et  $\forall x \geq 0, \varphi'(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ .

Revenons à  $f$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a :  $f(x) = \frac{2}{x^2} \varphi(x)$ .

$f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  comme produit et quotient de fonctions  $C^1$ .

$$\begin{aligned} \text{De plus, } \forall x > 0, f'(x) &= -\frac{4}{x^3} \varphi(x) + \frac{2}{x^2} \varphi'(x) \\ &= -\frac{4}{x^3} \varphi(x) + \frac{2}{x^2} \times \frac{x}{e^x + 1} \\ &= -\frac{4}{x^3} \underbrace{\left( \varphi(x) - \frac{x^2}{2(e^x + 1)} \right)}_{g(x)}. \end{aligned}$$

b)  $g$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  comme différence et quotient de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, g'(x) &= \varphi'(x) - \frac{1}{2} \times \frac{2x(e^x + 1) - x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{x}{e^x + 1} - \frac{2x(e^x + 1) - x^2 e^x}{2(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{2x(e^x + 1) - [2x(e^x + 1) - x^2 e^x]}{2(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 e^x}{2(e^x + 1)^2}. \end{aligned}$$

$\forall x \geq 0, g'(x) \geq 0$  donc  $g$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ .

$$\text{Or, } g(0) = \varphi(0) = \int_0^0 \frac{t}{e^t + 1} dt = 0.$$

On a donc  $\forall x \geq 0, g(x) \geq 0$ .

Par ailleurs,  $\forall x > 0, f'(x) = -\frac{4}{x^3} g(x)$  avec  $g(x) \geq 0$  et  $-\frac{4}{x^3} < 0$ .

Donc  $\forall x > 0, f'(x) \leq 0$ , ce qui prouve la décroissance de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

$f$  étant continue en 0 et décroissante sur  $]0, +\infty[$ , elle est aussi décroissante sur  $[0, +\infty[$ .

$$3)a) \forall t \geq 0, \frac{t}{e^t + 1} \leq 1 \iff t \leq e^t + 1 \iff e^t \geq t - 1.$$

La fonction exponentielle est convexe. Elle est donc au-dessus de toutes ses tangentes ; l'une d'entre elles, la tangente en 0 a pour équation  $y = t - 1$ .

Donc  $\forall t \geq 0, e^t \geq t - 1$ , puis  $\frac{t}{e^t + 1} \leq 1$ .

---

b) Soit  $x > 0$ . En intégrant entre les bornes croissantes 0 et  $x$ , on a :

$$\int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq \int_0^x 1 dt, \text{ c'est-à-dire : } \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq x.$$

On multiplie membre à membre par  $\frac{2}{x^2}$ , ce qui donne :  $f(x) \leq \frac{2}{x}$ .

On a par ailleurs  $f(x) \geq 0$ , ce qu'on peut voir facilement en utilisant 1)b).

Ainsi,  $\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$ .

Enfin,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ . D'après la propriété des gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

---

**Exercice 2 (edhec 2008)**

$$1)a) \bullet A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}, \text{ puis } (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -16 \\ -4 & -4 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Puis, } A(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -8 & -16 \\ -4 & -4 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Soit  $P(X) = X(X - 2)^2$ .

$P(A) = A(A - 2I)^2 = 0$  donc  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

D'après le cours, le spectre de  $A$  est inclus dans l'ensemble des racines de  $P$ , à savoir  $\{0, 2\}$ .

Ainsi, les valeurs propres possibles de  $A$  sont 0 et 2.

$$b) AU = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0U.$$

$U$  est non nul et vérifie  $AU = 0U$ . C'est donc un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 0.

$$AV = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2V.$$

$V$  est non nul et vérifie  $AV = 2V$ . C'est donc un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 2.

On a confirmé ci-dessus que 0 et 2 sont valeurs propres de  $A$  et il n'y en a pas d'autres possibles d'après 1)a).

Ainsi, les valeurs propres de  $A$  sont 0 et 2.

c) 0 est valeur propre de  $A$  donc  $A$  n'est pas inversible.

$A$  étant la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on conclut que  $f$  est bijectif.

$f$  est un endomorphisme bijectif de  $\mathbf{R}^3$  donc un automorphisme de  $\mathbf{R}^3$ .

2)a) Pour tous réels  $a, b$  et  $c$ , on a :

$$au + bv + cw = 0 \iff a(2, 1, -2) + b(3, 1, -2) + c(-2, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} 2a + 3b - 2c = 0 \\ a + b = 0 \\ -2a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a - 3a - 2c = 0 \\ b = -a \\ -2a + 2a + c = 0 \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

---

Donc la famille  $(u, v, w)$  est libre.

C'est une famille libre donc le cardinal vaut 3, et qui coïncide avec la dimension de  $\mathbf{R}^3$ . C'est donc une base de  $\mathbf{R}^3$ .

b) On cherche des réels  $x$  et  $y$  tels que  $f(w) = xv + yw$ .

La matrice colonne de  $f(w)$  dans  $\mathcal{B}$  est  $AW$ , où  $W$  est la matrice colonne de  $w$  dans  $\mathcal{B}$ .

La matrice colonne de  $xv + yw$  dans  $\mathcal{B}$  est  $xV + yW$ .

Ainsi,  $f(w) = xv + yw \iff AW = xV + yW$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ x \\ -2x + y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x = 1 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $f(w) = v + 2w$ .

c) On a vu dans la question 1)b) que  $AU = 0U$  et  $AV = 2V$ . Ces égalités sont la traduction matricielle des égalités vectorielles :  $f(u) = 0u$  et  $f(v) = 2v$ .

On a donc  $f(u) = 0u + 0v + 0w$ ,  $f(v) = 0u + 2v + 0w$  et  $f(w) = 0u + 1v + 2w$ .

On conclut que la matrice de  $f$  dans la base  $(u, v, w)$  est :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d)  $T$  est triangulaire, ses valeurs propres sont 0 et 2.

$T$  est de rang 2 car elle comporte une colonne nulle, ainsi qu'une deuxième et troisième colonne non colinéaires.

D'après le cours,  $\dim E_0(T) + \text{rg}(T) = 3$ , ce qui donne  $\dim E_0(T) = 1$ .

Même raisonnement pour  $T - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Donc  $\text{rg}(T - 2I) = 1$ , puis  $\dim E_2(T) + \text{rg}(T - 2I) = 3$  donne  $\dim E_2(T) = 1$ .

La somme des dimensions des sep de  $T$  vaut 2, alors que  $T \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ .

D'après le thm de réduction,  $T$  n'est pas diagonalisable.

---

Remarque

Le calcul des sous-espaces propres de  $T$  était possible, mais non nécessaire.  
Seule la dimension des sep de  $T$  importait.

e)  $T$  et  $A$  sont la matrice d'un même endomorphisme  $f$  dans les bases respectives  $(u, v, w)$  et  $\mathcal{B}$ .

D'après la formule de changement de base, on a :

$$T = P^{-1}AP \quad (1)$$

où  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $(u, v, w)$ .

Faisons un raisonnement par l'absurde en supposant  $A$  diagonalisable.

Alors, il existe  $Q$  inversible et  $D$  diagonale telle que

$$A = QDQ^{-1} \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit :

$$T = P^{-1}QDQ^{-1}P = (P^{-1}Q)D(P^{-1}Q)^{-1}.$$

$R = P^{-1}Q$  est inversible comme produit de deux matrices inversibles et l'égalité ci-dessus donne :  $T = RDR^{-1}$ .

$T$  est semblable à une matrice diagonale,  $T$  est donc diagonalisable, ce qui contredit la question 2)d).

Ainsi,  $A$  n'est pas diagonalisable.

Remarque

On pouvait aussi calculer les sous-espaces propres de  $A$  et appliquer le thm de réduction.

$$3)a) \text{ On obtient : } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\mathcal{P}(n)$  la proposition : «  $T^n = D^n + nD^{n-1}N$  ».

$\mathcal{P}(1)$  s'écrit : «  $T = D + N$  », c'est vrai.

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n T \\ &= (D^n + nD^{n-1}N) T \quad \text{par HR} \\ &= (D^n + nD^{n-1}N) (D + N) \\ &= D^{n+1} + D^n N + nD^{n-1}ND + nD^{n-1}N^2 \\ &= D^{n+1} + D^n N + nD^{n-1}DN + 0 \quad \text{car } DN = ND \text{ et } N^2 = 0 \\ &= D^{n+1} + D^n N + nD^n N \\ &= D^{n+1} + (n+1)D^n N. \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

---

On déduit que  $\forall n \in \mathbf{N}^*, T^n = D^n + nD^{n-1}N$ .

Remarque

Cette question pouvait aussi se démontrer en utilisant la formule du binôme.

b) Comme  $D$  est diagonale, on a  $\forall k \in \mathbf{N}^*, D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$ .

La question 3)a) donne pour tout  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} T^n &= D^n + nD^{n-1}N \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Et pour  $n = 1$ , l'égalité reste valable.

Remarque

L'égalité  $D^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$  n'est pas valable pour  $n = 1$ .

C'est pour cette raison qu'on a pris  $n \geq 2$  dans le calcul.

c)• En reprenant le raisonnement fait dans la question 2)e), on a :

$T = P^{-1}AP$  ou encore  $A = PTP^{-1}$ , où  $P$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $(u, v, w)$ .

En notant  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , on a :

$u = 2e_1 + 1e_2 - 2e_3$ ,  $v = 3e_1 + 1e_2 - 2e_3$  et  $w = -2e_1 + 0e_2 + 1e_3$ .

On déduit :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- On calcule  $P^{-1}$  par la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_3 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix}$$

Donc  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

d) C'est une récurrence très classique !

Soit  $\mathcal{P}(n)$  la proposition : «  $A^n = PT^n P^{-1}$  ».

$\mathcal{P}(0)$  est vraie car  $A^0 = I$  et  $PT^0 P^{-1} = PIP^{-1} = I$ .

Soit  $n \in \mathbf{N}$  / Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n A \\
&= PT^n P^{-1} A \quad \text{par HR} \\
&= PT^n P^{-1} PT P^{-1} \\
&= PT^n I T P^{-1} \\
&= PT^{n+1} P^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

On conclut que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $A^n = PT^n P^{-1}$ .

e) En reprenant le calcul de  $T^n$  de la question 3)b), on a pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$\begin{aligned}
A^n &= PT^n P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



---


$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 3 \times 2^n & 3n2^{n-1} - 2^{n+1} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & -2^{n+1} & -n2^n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \times 2^n & 3 \times 2^{n+1} + 3n2^n - 2^{n+2} & 3 \times 2^{n+1} + 3n2^{n-1} - 2^{n+1} \\ 2^n & 2^{n+1} + n2^n & 2^{n+1} + n2^{n-1} \\ -2^{n+1} & -2^{n+2} - n2^{n+1} + 2^{n+1} & -2^{n+2} - n2^n + 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En utilisant que  $2^{n+2} = 8 \times 2^{n-1}$ ,  $2^{n+1} = 4 \times 2^{n-1}$  et  $2^n = 2 \times 2^{n-1}$ , on peut

factoriser les coefficients par  $2^{n-1}$ , ce qui donne au final :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 6 & 6n + 4 & 3n + 8 \\ 2 & 2n + 4 & n + 4 \\ -4 & -4n - 4 & -2n - 6 \end{pmatrix}.$$

---

**Exercice 3 (edhec 2006)**

1)a)  $f$  est polynomiale donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}$ . Elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 données par :

$$\partial_1 f(x, y) = 4x + 2y - 1 \text{ et } \partial_2 f(x, y) = 4y + 2x - 1.$$

b)  $(x, y)$  est un point critique de  $f$

$$\iff \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + 2y - 1 = 0 & L_1 \\ 4y + 2x - 1 = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x - 1 = 0 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 4y + 2x - 1 = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1/6 \\ y = 1/6 \end{cases}$$

Donc  $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$  est le seul point critique de  $f$ .

2)a)  $f$  est polynomiale donc de classe  $C^2$  sur  $\mathbf{R}$ . Elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 données par :

$$\partial_{1,1} f(x, y) = \partial_1 (\partial_1 f(x, y)) = 4,$$

$$\partial_{2,1} f(x, y) = \partial_2 (\partial_1 f(x, y)) = 2, \quad \partial_{1,2} f(x, y) = \partial_1 (\partial_2 f(x, y)) = 2,$$

$$\partial_{2,2} f(x, y) = \partial_2 (\partial_2 f(x, y)) = 4.$$

b) La matrice hessienne de  $f$  au point  $A$  est :

$$H = \begin{pmatrix} \partial_{1,1} f(1/6, 1/6) & \partial_{1,2} f(1/6, 1/6) \\ \partial_{2,1} f(1/6, 1/6) & \partial_{2,2} f(1/6, 1/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\lambda$  est valeur propre de  $H$

$$\iff H - \lambda I \text{ n'est pas inversible}$$

$$\iff \det(H - \lambda I) = 0$$

$$\iff (4 - \lambda)(4 - \lambda) - 2 \times 2 = 0.$$

$$\iff (4 - \lambda)^2 = 2^2$$

$$\iff 4 - \lambda = 2 \text{ ou } 4 - \lambda = -2$$

$$\iff \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 6.$$

Les valeurs propres de  $H$  sont strictement positives donc  $f$  présente en  $A$  un minimum local.

$$\text{De plus, } m = f(1/6, 1/6) = 2 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{1}{36} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} 3)a) \text{ On a : } (a + b + c)^2 &= (a + (b + c))^2 \\ &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + c^2 + 2bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \end{aligned}$$

---

On développe l'expression demandée avec la formule précédente :

$$\begin{aligned}
& 2 \left( x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{2} \left( y - \frac{1}{6} \right)^2 \\
&= 2 \left( x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{16} + xy - \frac{y}{4} - \frac{x}{2} \right) + \frac{3}{2} \left( y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{1}{36} \right) \\
&= 2x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{8} + 2xy - \frac{y}{2} - x + \frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{24} \\
&= 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y + \frac{1}{6} \\
&= f(x, y) + \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

b) A cause des carrés, on a  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $2 \left( x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{2} \left( y - \frac{1}{6} \right)^2 \geq 0$ ,

c'est-à-dire :  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $f(x, y) + \frac{1}{6} \geq 0$ .

Comme  $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}$  on a déduit :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) \geq f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

Cela prouve que  $m$  est le minimum global de  $f$  sur  $\mathbf{R}^2$ .

$$\begin{aligned}
4)a) \text{ On remarque que } f(e^x, e^y) &= 2(e^x)^2 + 2(e^y)^2 + 2e^x e^y - e^x - e^y \\
&= 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y \\
&= g(x, y).
\end{aligned}$$

On a vu dans la question précédente que  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $f(x, y) \geq -\frac{1}{6}$ .

$x$  et  $y$  étant des réels quelconques, on peut appliquer l'inégalité ci-dessus avec  $x \rightarrow e^x$  et  $y \rightarrow e^y$ , ce qui donne le résultat demandé, à savoir :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, g(x, y) \geq -\frac{1}{6}.$$

$$b) \text{ On a : } g(\ln(1/6), \ln(1/6)) = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}.$$

La question précédente donne alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, g(x, y) \geq g(\ln(1/6), \ln(1/6)).$$

$g$  admet donc un minimum global en  $(\ln(1/6), \ln(1/6))$  ou ce qui est pareil, en  $(-\ln 6, -\ln 6)$ .

---

## Problème (edhec 2017)

### Partie 1

1) A l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1. A l'instant 1, le mobile sera de façon équiprobable sur l'un quelconque des sommets 2, 3 ou 4.

On a donc  $X_1(\Omega) = \llbracket 2, 4 \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 2, 4 \rrbracket, P(X_1 = k) = \frac{1}{3}$ .

Ainsi,  $X_1$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 2, 4 \rrbracket$ .

$$E(X_1) = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} = 3.$$

2) Montrons que  $\forall n \geq 2, X_n(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ .

En terme de graphe, cela revient à établir qu'on peut trouver une chaîne de longueur  $n$  joignant le sommet 1 à n'importe lequel des sommets.

Distinguons deux cas selon la parité de  $n$ .

- $n$  pair ( $n = 2k$  avec  $k \in \mathbf{N}^*$ )

$1 \rightarrow 1$  : faire  $k$  fois le cycle 1-2-1,

$1 \rightarrow i$  avec  $i \in \{2, 3, 4\}$  : prendre une chaîne de longueur 2 entre 1 et  $i$ , puis faire  $k - 1$  fois le cycle  $i - 1 - i$ .

- $n$  impair ( $n = 2k + 1$  avec  $k \in \mathbf{N}^*$ )

$1 \rightarrow 1$  : prendre un cycle de longueur 3 entre 1 et 1, puis faire  $k - 1$  fois le cycle 1-2-1,

$1 \rightarrow i$  avec  $i \in \{2, 3, 4\}$  : faire  $k$  fois le cycle 1-2-1, puis prendre l'arête  $1 - i$ .

#### Remarques

– La figure de l'énoncé est le graphe complet  $K_4$ .

Plus généralement, on peut montrer que dans le graphe  $K_p$  avec  $p \geq 3$ , on peut pour tout entier  $n \geq 2$  joindre deux sommets quelconques de ce graphe par une chaîne de longueur  $n$ .

– Si on n'aime pas les graphes, on peut tenter une récurrence sur  $n$ .

Pour l'hérédité : on prend  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , on cherche si à l'instant  $n + 1$ , on peut faire parvenir le mobile en  $i$ .

Par hypothèse de récurrence,  $X_n(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ , ce qui signifie qu'on peut par exemple faire parvenir le mobile en  $j \neq i$  à l'instant  $n$ . Il reste ensuite à le déplacer de  $j$  vers  $i$ . A l'instant  $n + 1$ , le mobile est alors en  $i$ .

3)a) Soit  $n \geq 2$  un entier.

Comme  $X_n(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , la famille d'événements  $((X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4))$  est un système complet.

La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=1}^4 P((X_{n+1} = 1) \cap (X_n = k)) \\ &= P((X_{n+1} = 1) \cap (X_n = 1)) + \sum_{k=2}^4 P((X_{n+1} = 1) \cap (X_n = k)) \end{aligned}$$

---

Or,  $P((X_{n+1} = 1) \cap (X_n = 1)) = 0$  car le mobile ne peut pas à deux instants consécutifs être sur le même sommet.

On poursuit le calcul :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=2}^4 P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 1)P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=2}^4 \frac{1}{3}P(X_n = k) \\ &= \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)). \end{aligned}$$

b)•  $X_0$  suit une loi certaine égale à 1.

On a donc  $P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 0$ .

De plus,  $P(X_1 = 1) = 0$ .

Pour  $n = 0$ , l'égalité 3)a) s'écrit alors :  $0 = \frac{1}{3}(0 + 0 + 0)$ , ce qui est vrai.

• On a vu dans 1) que  $P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = P(X_1 = 4) = \frac{1}{3}$ .

De plus, l'énoncé donne :  $P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$ .

Pour  $n = 1$ , l'égalité 3)a) s'écrit :  $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$ , ce qui est vrai.

c) L'égalité  $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$  provient du fait que la famille d'événements  $((X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4))$  est un système complet.

On déduit :  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1 - P(X_n = 1)$ .

En substituant dans l'égalité 3)a), on a :

$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(1 - P(X_n = 1))$ , c'est-à-dire :

$$P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.$$

d) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , posons  $u_n = P(X_n = 1)$ .

On a  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}$  (1)

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est donc arithmético-géométrique.

On cherche le réel  $x$  tel que  $x = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$  (2)

On obtient :  $\frac{4}{3}x = \frac{1}{3}$ , soit  $x = \frac{1}{4}$ .

La différence de (1) et (2) donne :  $u_{n+1} - x = -\frac{1}{3}(u_n - x)$ ,

c'est-à-dire :  $u_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{1}{4}\right)$ .

---

La suite  $\left(u_n - \frac{1}{4}\right)_{n \geq 0}$  est donc géométrique de raison  $-\frac{1}{3}$ .

On a donc  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(u_0 - \frac{1}{4}\right)$ .

Comme  $u_0 = P(X_0 = 1) = 1$ , on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Remarque

La formule de  $P(X_n = 1)$  étant fournie par l'énoncé, on pouvait aussi faire une récurrence.

4)a) La formule des probabilités totales donne de la même façon :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= \sum_{k=1}^4 P((X_{n+1} = 2) \cap (X_n = k)) \\ &= P((X_{n+1} = 2) \cap (X_n = 2)) + \sum_{k \in \{1,3,4\}} P((X_{n+1} = 2) \cap (X_n = k)) \\ &= 0 + \sum_{k \in \{1,3,4\}} P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 2)P(X_n = k) \\ &= \sum_{k \in \{1,3,4\}} \frac{1}{3} P(X_n = k) \\ &= \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)). \end{aligned}$$

b)  $\forall n \in \mathbf{N}, P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1 - P(X_n = 2)$ .

En substituant dans l'égalité 4)a), on a :

$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3} (1 - P(X_n = 2))$ , c'est-à-dire :

$$P(X_{n+1} = 2) = -\frac{1}{3} P(X_n = 2) + \frac{1}{3}.$$

c) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $v_n = P(X_n = 2)$ .

On a  $\forall n \in \mathbf{N}, v_{n+1} = -\frac{1}{3} v_n + \frac{1}{3}$ .

La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est arithmético-géométrique.

Avec la même technique que dans la question 3)d), on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N}, v_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(v_0 - \frac{1}{4}\right).$$

Comme  $v_0 = P(X_0 = 2) = 0$ , on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbf{N}, v_n = P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

5) Les suites  $(P(X_n = 2))_{n \geq 0}$ ,  $(P(X_n = 3))_{n \geq 0}$  et  $(P(X_n = 4))_{n \geq 0}$  vérifient la même relation de récurrence et ont le même premier terme, puisque  $P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 0$ .

Elles sont donc égales, ce qui permet de conclure que

$$\forall n \in \mathbf{N}, P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{3} \right)^n.$$

6)  $X_n$  est discrète finie donc admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) + 3 \times P(X_n = 3) + 4 \times P(X_n = 4) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left( -\frac{1}{3} \right)^n + (2 + 3 + 4) \times \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{3} \right)^n. \end{aligned}$$

## Partie 2

7)a) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :

$$U_n A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice ligne  $(a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)$  avec :

$$a_1 = \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)) = P(X_{n+1} = 1).$$

$$a_2 = \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)) = P(X_{n+1} = 2).$$

$$a_3 = \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 4)) = P(X_{n+1} = 3).$$

$$a_4 = \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3)) = P(X_{n+1} = 4).$$

Cette matrice ligne est  $U_{n+1}$ .

Pour  $a_1$  et  $a_2$ , cela provient des questions 3)a) et 4)a).

Quant à  $a_3$  et  $a_4$ , on les obtient par un raisonnement analogue.

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} = AU_n.$$

### Remarque

A s'appelle la matrice de transition du graphe probabiliste.

b) Soit  $\mathcal{P}(n)$  la proposition :  $\ll U_n = U_0 A^n \gg$ .

$U_0 A^0 = U_0 I = U_0$  donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= U_n A \\
&= U_0 A^n A \quad \text{par HR} \\
&= U_0 A^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

On conclut que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $U_n = U_0 A^n$ .

$$c) U_0 = \begin{pmatrix} P(X_0 = 1) & P(X_0 = 2) & P(X_0 = 3) & P(X_0 = 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Posons } A^n = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a alors : } U_n = U_0 A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

La première ligne de  $A^n$  est donc  $U_n$ , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

8)• Position initiale du mobile en 2 :

$$\text{On a alors : } U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Posons } A^n = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}. \text{ On a alors : } U_n = U_0 A^n = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

La seconde ligne de  $A^n$  est donc  $U_n$ , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

• Position initiale du mobile en 3 :

La troisième ligne de  $A^n$  est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

• Position initiale du mobile en 4 :

La quatrième ligne de  $A^n$  est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$



---

### Partie 3

$$9) A = aI + bJ$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b & b & b \\ b & a+b & b & b \\ b & b & a+b & b \\ b & b & b & a+b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b=1/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1/3 \\ b=1/3 \end{cases}$$

$$\text{Donc } A = -\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J.$$

10)a) On vérifie facilement que  $J^2 = 4J$ .

Puis, récurrence en posant  $\mathcal{P}(k) : \ll J^k = 4^{k-1}J \gg$ .

Pour  $k=1$ , on a :  $J^1 = J$  et  $4^0J = J$  donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

Soit  $k \in \mathbf{N}^*$ . Supposons  $\mathcal{P}(k)$  vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

$$\begin{aligned} J^{k+1} &= J^k J \\ &= (4^{k-1}J)J \quad \text{par HR} \\ &= 4^{k-1}J^2 \\ &= 4^{k-1}(4J) \\ &= 4^k J. \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

On conclut que  $\forall k \in \mathbf{N}^*, J^k = 4^{k-1}J$ .

b) Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ .

$$A^n = \left(-\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J\right)^n = \left(\frac{1}{3}(J - I)\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (J - I)^n.$$

La formule du binôme s'applique car  $I$  et  $J$  commutent, ce qui donne :

---


$$\begin{aligned}
A^n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k (-I)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left( (-1)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k \right) \quad \text{en isolant le terme d'indice 0} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left( (-1)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} J \right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \left(\frac{1}{3}\right)^n \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} \right) J \quad (*)
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la somme.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^k \\
&= \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^k - (-1)^n \right) \quad \text{en retranchant le terme d'indice 0} \\
&= \frac{1}{4} ((-1+4)^n - (-1)^n) \quad \text{par la formule du binôme} \\
&= \frac{1}{4} (3^n - (-1)^n).
\end{aligned}$$

On reporte dans (\*) :

$$A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \left(\frac{1}{3}\right)^n \left( \frac{1}{4} (3^n - (-1)^n) \right) J.$$

Ce qui donne après simplifications :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4} \left( 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) J.$$

c) Pour  $n = 0$ , l'égalité reste valable puisque

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^0 I + \frac{1}{4} \left( 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^0 \right) J = 1I + \frac{1}{4}(1-1)J = I = A^0.$$

---

## Partie 4

11)a) A la deuxième ligne, on définit la nouvelle liste L par compréhension en ne prenant que les éléments j de L qui sont différents de 2.

Donc à la fin du programme,  $L=[1,3,4]$ .

b) Programme

```
def markov(n):  
    X=[0]*(n+1)  
    X[0]=1  
    for k in range(1,n+1):  
        L=[1,2,3,4]  
        L=[j for j in L if j!=X[k-1]]  
        X[k]=rd.choice(L)  
    return X
```

c) Programme

```
trajet=markov(100)  
r=trajet.count(1)  
print(r-1)
```

Remarque

On met `print(r-1)` et non `print(r)` pour ne pas compter la position initiale du mobile qui est 1.

d) On introduit la suite de variables aléatoires  $(Y_k)_{k \geq 1}$  par :

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si le mobile est en 1 à l'instant } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Posons } Y = \sum_{k=1}^{100} Y_k$$

Y représente le nombre de fois où le mobile repasse par le sommet 1, lors de ses 100 premiers déplacements.

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\sum_{k=1}^{100} Y_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{100} E(Y_k) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= \sum_{k=1}^{100} P(Y_k = 1) \quad \text{car } Y_k \text{ suit une loi de Bernoulli} \\ &= \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{d'après 3)d)} \end{aligned}$$

---

On poursuit en calculant la somme :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \sum_{k=1}^{100} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ &= 25 + \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{100}}{1 + \frac{1}{3}} \\ &= 25 - \frac{3}{16} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{100}\right) \end{aligned}$$

$\approx 25$ .

Interprétation :

Cela signifie qu'en moyenne, le mobile revient 25 fois sur le sommet 1 au cours de ses 100 premiers déplacements.

Il est donc logique que les valeurs données par l'énoncé 23,28,23,25 et 26 soient proches de 25.

Remarque

Ce n'est qu'une moyenne !

En n'exécutant que 5 fois le programme 11)c) comme dans l'énoncé, on pourrait avoir des valeurs de  $r$  assez éloignées de 25.

C'est en exécutant un plus grand nombre de fois le programme 11)c) qu'on obtiendrait une valeur moyenne de  $r$  proche de 25.

Une question vraiment difficile !