Correction DS4

Exercice 1 (edhec 2019)

1)$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$

2)a)Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$. Supposons l'événement $B_1 \cap ... \cap B_{i-1}$ réalisé.
L'urne comporte alors $n-(i-1) = n-i+1$ boules dont $(n-1)-(i-1) = n-i$ boules blanches.
La probabilité de tirer une blanche au$i$-ième tirage vaut alors $\dfrac{n-i}{n-i+1}$.

Ainsi, $P_{B_1 \cap ... \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

2)b)Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap N_k) \\
&= P(B_1)P_{B_1}(B_2)...P_{B_1 \cap ... \cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1 \cap ... \cap B_{k-1}}(N_k) \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

> Remarque
> Pour calculer les probabilités conditionnelles, on a utilisé la question 2)a) en faisant varier i de 2 à $k-1$.

2)c)$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.
Donc $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1, n]\!]\right)$.

Le cours donne $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

3)a)Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, notons $B'_i =$« le i-ième tirage donne une blanche numérotée 0 ».
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X = k \cap Y = 0) &= P(B'_1 \cap B'_2 \cap ... \cap B'_{k-1} \cap N_k) \\
&= P(B'_1)P_{B'_1}(B'_2)...P_{B'_1 \cap ... \cap B'_{k-2}}(B'_{k-1})P_{B'_1 \cap ... \cap B'_{k-1}}(N_k) \\
&= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{n-k}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

> Remarque
> Les probabilités ont été calculées comme pour la question 3)b), mais avec au numérateur la boule blanche portant le numéro 1 en moins.

3)b)La formule des probabilités totales pour le sce $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$ donne :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{n} P(X = k \cap Y = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} j \quad \text{en posant } j = n-k \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3)c)$Y(\Omega) = \{0, 1\}$ donc Y suit une loi de Bernoulli.
Son paramètre est $P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$.

4)a)programme :

```
import numpy.random as rd
n=int(input("entrer n"))
nB=n-1
X=1
u=rd.randint(1,nB+2)
while u<nB+1:
    nB=nB-1
    u=rd.randint(1,nB+2)
    X=X+1
print("la boule noire est apparue au tirage",X)
```

b)programme :

```
import numpy.random as rd
n=int(input("entrer n"))
nB=n-1
X=1
Y=0
u=rd.randint(1,nB+2)
while u<nB+1:
    if u==1 :
        Y=1
    nB=nB-1
    u=rd.randint(1,nB+2)
    X=X+1
print("la boule noire est apparue au tirage",X)
print("la valeur de Y est",Y)
```

Exercice 2 (ecricome 2007)

Partie I :

1) $\lim_{t\to+\infty} t = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} \frac{a^2}{t} = 0$. Par somme, $\lim_{t\to+\infty} f_a(t) = +\infty$.

$\forall t > 0,\ f_a(t) - \frac{1}{2}t = \frac{a^2}{2t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}t$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_{f_a}$ en $+\infty$.

$\forall t > 0,\ f_a(t) - \frac{1}{2}t = \frac{a^2}{2t} > 0$ donc $\mathscr{C}_{f_a}$ est au-dessus de son asymptote.

2) $\lim_{t\to 0^+} t = 0$ et $\lim_{t\to 0^+} \frac{a^2}{t} = +\infty$. Par somme, $\lim_{t\to 0^+} f_a(t) = +\infty$.
Cela signifie que la droite d'équation $t = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_{f_a}$.
3)f_a est dérivable sur $]0, +\infty[$ par somme et inverse de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall t > 0,\ f_a'(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \frac{t^2 - a^2}{2t^2} = \frac{(t-a)(t+a)}{2t^2}$.

$f_a'(t)$ est du signe de $t - a$, d'où le tableau de variations :

t	0		a		$+\infty$
$f_a'(t)$		$-$	0	$+$	
$f_a(t)$	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

4)D'après le tableau, f_a présente un minimum en a qui vaut a.
Donc $\forall t > 0,\ f_a(t) \geq a$.

Partie II :

1)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n = a$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $u_0 = a$ ». Elle est vraie par énoncé.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par hyp. de récurrence, $u_n = a$ donc $f_a(u_n) = f_a(a) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2}{a}\right) = a$.

Et comme $u_{n+1} = f_a(u_n)$, on a donc prouvé que $u_{n+1} = a$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = a$.

2)D'après la question 3), $\forall t \geq a,\ f_a'(t) \geq 0$.

De plus, $\forall t \geq a,\ f_a'(t) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a^2}{t^2}\right) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{a^2}{2t^2} \leq 0$.

Ainsi, $\forall t \geq a,\ 0 \leq f_a'(t) \leq \dfrac{1}{2}$.

3)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n \geq a$ ».

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $u_1 \geq a$ ».
En utilisant la question 4) avec $t = u_0 > 0$, on a : $f_a(u_0) \geq a$, soit $u_1 \geq a$.
Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq a$.
En utilisant la question 4) avec $t = u_n > 0$, on a : $f_a(u_n) \geq a$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq a$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq a$.

4)• f_a est dérivable sur $[a, +\infty[$ et $\forall t \in [a, +\infty[\,,\ 0 \leq f_a'(t) \leq \dfrac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels c et d de $[a, +\infty[$ avec $c \leq d$, on a :

$0(d-c) \leq f_a(d) - f_a(c) \leq \dfrac{1}{2}(d-c)$.

Prenons $c = a$ et $d = u_n$. C'est licite car $a \leq u_n$ d'après II)3).

On obtient alors : $0 \leq f_a(u_n) - f_a(a) \leq \dfrac{1}{2}(u_n - a)$.

$f_a(a) = a$ et $f_a(u_n) = u_{n+1}$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq u_{n+1} - a \leq \dfrac{1}{2}(u_n - a)$.

• Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$ ».

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $|u_1 - a| \leq |u_1 - a|$ », ce qui est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$.

En multipliant membre à membre par $\dfrac{1}{2}$, on a :

$$\frac{1}{2}|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n} |u_1 - a| \quad (*)$$

De plus, on sait que $u_{n+1} - a \leq \dfrac{1}{2}(u_n - a)$. Comme $u_n - a$ et $u_{n+1} - a$ sont positifs, on a également $|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - a| \quad (**)$

En recollant $(*)$ et $(*)$, on a : $|u_{n+1}-a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - a|$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$.

5) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et $0 \leq |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} |u_n - a| = 0$, ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

6)Comme on impose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$, c'est donc que $a = \sqrt{2}$.

```
u=1
for k in range(100):
    u=0.5*(u+2/u)
    print(u)
```

Partie III :

1)$(x,y) \mapsto (1+x)(1+y)$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

$(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont également de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.
Par inverse de fonctions C^2 dont le dénominateur ne s'annule pas, $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ et $(x,y) \mapsto \frac{1}{y}$ sont de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

Par produit et somme, g est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\partial_1 g(x,y) &= \frac{1+y}{2}\left(\partial_1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(1+x) + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\partial_1(1+x)\right)\\
&= \frac{1+y}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\times(1+x) + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\times 1\right)\\
&= \frac{1+y}{2}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\right).
\end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie, on a également $\partial_2 g(x,y) = \frac{1+x}{2}\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}\right)$.

$\partial_{1,1}^2 g(x,y) = \frac{1+y}{2} \times \frac{2}{x^3} = \frac{1+y}{x^3}$,

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,2} g(x,y) &= \partial_1\big(\partial_2 g(x,y)\big)\\
&= \partial_1\left(\frac{1+x}{2}\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \partial_1\left(\frac{1+x}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1+x}{2}\times\partial_1\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1+x}{2}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2y^2}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}\\
&= -\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{2x^2}.
\end{aligned}$$

$\partial^2_{2,1} g(x,y) = \partial^2_{1,2} g(x,y)$ par le théorème de Schwarz (car f est C^2),

$\partial^2_{2,2} g(x,y) = \dfrac{1+x}{2}\times\dfrac{2}{y^3} = \dfrac{1+x}{y^3}$.

2)• Les points critiques de g sont les solution sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ du système :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_1 g(x,y)=0\\ \partial_2 g(x,y)=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}\dfrac{1+y}{2}\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y}\right)=0\\[2ex] \dfrac{1+x}{2}\left(-\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x}\right)=0\end{array}\right.$$

Comme $x>0$ et $y>0$, on a $\dfrac{1+y}{2}\neq 0$ et $\dfrac{1+x}{2}\neq 0$.

Le système est donc équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y}=0\\[2ex] -\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x}=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=x^2\\ x=y^2\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=y^4\\ x=y^2\end{array}\right.$$

Or, $y=y^4 \iff y-y^4=0 \iff y(1-y^3)=0 \iff y^3=1$ car $y>0$.

Enfin, $y^3=1 \iff y=1$ du fait de la bijectivité de $t\mapsto t^3$.

En reportant dans la deuxième équation, on obtient $x=1$.

Finalement, l'unique point critique de g est $(1,1)$.

• La matrice hessienne de g en $(1,1)$ est :
$\begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}g(1,1) & \partial^2_{1,2}g(1,1) \\ \partial^2_{2,1}g(1,1) & \partial^2_{2,2}g(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
$\iff \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible
$\iff (2-\lambda)^2 - (-1)\times(-1) = 0$
$\iff (2-\lambda)^2 = 1$
$\iff 2-\lambda = \pm 1$.
$\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 3$.
Les valeurs propres sont strictement positives donc g admet en (1,1) un minimum local.

3)Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned} 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) &= 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2y} + \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{y+x}{2xy}(1 + y + x + xy) \\ &= \frac{y + y^2 + yx + xy^2 + x + xy + x^2 + x^2y}{2xy} \\ &= \frac{1}{2x} + \frac{y}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2} + \frac{x}{y} + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Donc $\forall x > 0, \forall y > 0,\ g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right)$.

4)La valeur du minimum local de g est $g(1,1) = 4$.

Donc $\forall x > 0, \forall y > 0,\ g(x,y) - g(1,1) = f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) - 3 \quad (**)$

La question I)4) pour $a = 1$ donne $\forall t > 0,\ f_1(t) \geq 1$.

On a donc $\forall x > 0, \forall y > 0,\ f_1(x) \geq 1, f_1(y) \geq 1$ et $f_1\left(\frac{x}{y}\right) \geq 1$.

En reportant dans $(**)$, on a : $\forall x > 0, \forall y > 0,\ g(x,y) - g(1,1) \geq 0$ ou encore $\forall x > 0, \forall y > 0,\ g(x,y) \geq g(1,1)$, ce qui prouve que g admet un minimum global en (1,1) sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

Exercice 3 (eml 2020)

1)a)$E = \left\{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbf{R}^2\right\}$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(M(1,0), M(0,1)\right).$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$.

Les matrices $M(1,0)$ et $M(0,1)$ ne sont pas colinéaires donc la famille $(M(1,0), M(0,1))$ est libre.

Etant libre et génératrice de E, c'est une base de E. Donc $dimE = 2$.

b)On remarque que $M(1,0)M(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin E.$

En effet, le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne n'est pas nul.

On peut donc conclure que le produit de deux matrices de E n'est pas toujours dans E.

2)$M(0,0)$ est la matrice nulle.
Elle est en particulier symétrique donc diagonalisable.

3)a)$A^2 = M(a,0)^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

On remarque que $A^2 = aA$, c'est -à-dire : $A^2 - aA = 0$.

Posons $P(X) = X^2 - aX$. L'égalité précédente donne : $P(A) = 0$, ce qui prouve que P est un polynôme annulateur de A.

b)• D'après le cours, les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de P.

Or, $P(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - ax = 0 \Longleftrightarrow x(x-a) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = a$.

Ainsi, $sp(A) \subset \{0, a\}$.

• Réciproquement, on va confirmer que 0 et a sont des valeurs propres de A en montrant que $E_0(A)$ et $E_a(A)$ sont non nuls.

$E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$AU = 0 \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff a(x+t) = 0$$

$$\iff x + t = 0 \quad \text{car } a \neq 0.$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid t = -x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \right\}$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

Ainsi, $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_0(A)$.

De plus, pour tous réels x, y et z, on a :

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff x = y = z = 0$.

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

Etant libre et génératrice de $E_0(A)$, c'est une base de $E_0(A)$.

$E_0(A)$ est non nul, ce qui prouve que 0 est valeur propre de A.
Le sous-espace propre de A associé à 0 est $E_0(A)$ dont une base a été donnée plus haut.

Pour $E_a(A)$, on peut refaire des calculs analogues ou aller un peu plus vite par le raisonnement suivant :

On remarque que $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cela prouve que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_a(A)$ et entraîne que $E_a(A)$ est non nul.

Donc a est valeur propre de A et $E_a(A)$ est le sous-espace propre de A associé à a.

On a montré que 0 et a sont des valeurs propres de A et il n'y en a pas d'autres grâce à la question 3)a). Ainsi, $sp(A) = \{0, a\}$.

Il reste à trouver une base de $E_a(A)$.
On sait que $dimE_0(A) + dimE_a(A) \leq 4$ et que $dimE_0(A) = 3$.
Donc $dimE_a(A) \leq 1$.
De plus, on a : $dimE_a(A) \geq 1$ puisque $E_a(A)$ est non nul.
Finalement, $dimE_a(A) = 1$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $E_a(A)$ (un seul vecteur non nul).

Son cardinal vaut 1 ainsi que la dimension de $E_a(A)$.
C'est donc une base de $E_a(A)$.

c)D'après la question précédente, $dimE_0(A) + dimE_a(A) = 3 + 1 = 4$ et $A \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$.
D'après le thm de réduction, A est diagonalisable.

Elle peut donc s'écrire sous la forme réduite : $A = PDP^{-1}$, où :

− P est une matrice inversible de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont formées des bases des sous-espaces propres de A,
− D est une matrice diagonale de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A, rangées pareilles que les colonnes de P.

On peut prendre $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

> Remarque
> Il n'y a pas unicité du couple (D, P).

4)a)• $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$.

B a 4 colonnes identiques et non nulles. Donc $rg(B) = 1$.

• $B - bI_4 = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}$.

Notons C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de $B - bI_4$.
Par définition du rang, $rg(B-bI_4) = dim\text{Vect}\,(C_1, C_2, C_3, C_4) = dim\text{Vect}\,(C_1, C_2, C_3)$ car C_4 est nulle.

Pour tous réels x, y et z, on a :

$$xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0 \Longleftrightarrow x \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -bx = 0 \\ -by = 0 \\ -bz = 0 \\ bx + by + bz = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x = y = z = 0 \quad \text{du fait que } b \neq 0.$$

Donc la famille (C_1, C_2, C_3) est libre. Elle est par ailleurs génératrice de Vect$\,(C_1, C_2, C_3)$. C'est donc une base de Vect$\,(C_1, C_2, C_3)$, lequel est alors de dimension 3.
Ainsi, $rg(B - bI_4) = 3$.

b)$B \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ n'est pas de rang 4. Donc B n'est pas inversible, ce qui prouve que 0 est valeur propre de B.

De même, $B - bI_4 \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ n'est pas de rang 4. Donc $B - bI_4$ n'est pas inversible, ce qui prouve que b est valeur propre de B.

D'après le cours, $dimE_0(B) + rg(B) = 4$, soit : $dimE_0(B) = 4 - 1 = 3$.

De même, $dimE_b(B) + rg(B - bI_4) = 4$, soit : $dimE_b(B) = 4 - 3 = 1$.

> Remarque
> Il n'y a pas de place pour une troisième valeur propre c car on aurait alors $dimE_c(B) \geq 1$, puis $dimE_0(Ab) + dimE_b(B) + dimE_c(B) > 4$, ce qui est impossible.

c)$dimE_0(Ab) + dimE_b(B) = 1 + 3 = 4$ et $B \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$.
D'après le thm de réduction, B est diagonalisable.

5)a)$Kerf = \{u \in \mathbf{R}^4 \mid f(u) = 0\}$. Posons $u = (x, y, z, t)$.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ son vecteur colonne dans la base canonique.

$$\begin{aligned}
f(u) = 0 &\iff M(a,b)U = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} a(x+t) = 0 \\ b(x+y+z+t) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+t = 0 & \text{car } a \neq 0 \\ x+y+z+t = 0 & \text{car } b \neq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -t \\ y = -z \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } Kerf &= \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x = -t \text{ et } y = -z\} \\
&= \{(-t,-z,z,t) \in \mathbf{R}^4, (z,t) \in \mathbf{R}^2\} \\
&= \{z(0,-1,1,0) + t(-1,0,0,1), (z,t) \in \mathbf{R}^2\} \\
&= \text{Vect}\big(\underbrace{(0,-1,1,0)}_{v_3}, \underbrace{(-1,0,0,1)}_{v_4}\big).
\end{aligned}$$

v_3 et v_4 ne sont pas colinéaires donc (v_3, v_4) est libre. Elle est par ailleurs génératrice de $Kerf$, c'est donc une base de $Kerf$. Donc dim $Kerf = 2$.

> Remarque
> On pouvait aussi appliquer le théorème du rang : $dimKerf + dimImf = 4$ avec $dimImf = rg\big(M(a,b)\big) = 2$ en considérant les 2 vecteurs colonnes non colinéaires de la matrice, ce qui donne $dimKerf = 2$.
> Il reste à trouver deux vecteurs non colinéaires de $Kerf$ et on aura alors une base de $Kerf$ par coïncidence cardinal dimension.

b)Pour tous réels x, y, z et t, on a :

$$\begin{aligned}
& xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = 0 \\
\iff & x(1,1,1,0) + y(0,0,0,1) + z(0,-1,1,0) + t(-1,0,0,1) = (0,0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} x - t = 0 \\ x - z = 0 \\ x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \\
\iff & x = y = z = t = 0.
\end{aligned}$$

Donc la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre. Son cardinal vaut 4, tout comme la dimension de $\mathbf{R}^4$. C'est donc une base de $\mathbf{R}^4$.

c)Le vecteur colonne de $f(v_1)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ est :
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 3b \end{pmatrix}.$$
Donc $f(v_1) = (a, a, a, 3b) = a(1, 1, 1, 0) + 3b(0, 0, 0, 1) = av_1 + 3bv_2$.
Le vecteur colonne de $f(v_2)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ est :
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$
Donc $f(v_2) = (a, a, a, b) = a(1, 1, 1, 0) + b(0, 0, 0, 1) = av_1 + bv_2$.
Enfin, $f(v_3) = f(v_4) = 0$ car v_3 et v_4 sont dans $Kerf$.

On déduit : $N(a,b) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d)Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $\lambda \neq 0$.

X est un vecteur propre de $N(a,b)$ associé à λ
$\Longleftrightarrow N(a,b)X = \lambda X$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} ax + ay \\ 3bx + by \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \\ \lambda t \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} ax + ay = \lambda x \\ 3bx + by = \lambda y \\ \lambda z = 0 \\ \lambda t = 0 \end{array} \right.$$
$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}}_{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } z = t = 0 \text{ car } \lambda \neq 0!!!$$
$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T associé à λ et $z = t = 0$.

Remarque
Comme $X \neq 0$ et que $z = t = 0$, on a nécessairement $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, ce qui permet d'être sûr que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ n'est pas nul, un vecteur propre ne pouvant pas être nul.

e)•On a ici : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $N(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de T
$\Longleftrightarrow T - \lambda I$ n'est pas inversible
$\Longleftrightarrow det(T - \lambda I) = 0$
$\Longleftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 \times 3 = 0$
$\Longleftrightarrow (1-\lambda)^2 = 3$
$\Longleftrightarrow 1 - \lambda = \pm\sqrt{3}$
$\Longleftrightarrow \lambda = 1 - \sqrt{3}$ ou $\lambda = 1 + \sqrt{3}$.
• Soient $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ des vecteurs propres de T respectivement associés à $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.
D'après la question 5)d) :
$\begin{pmatrix} i \\ j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} k \\ l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de $N(1,1)$ associés respectivement à $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.
On a donc $dimE_{1-\sqrt{3}}\big(N(1,1)\big) \geq 1$ et $dimE_{1+\sqrt{3}}\big(N(1,1)\big) \geq 1$.
Par ailleurs, $N(1,1)$ est de rang 2 car ses deux vecteurs colonnes non nuls ne sont pas colinéaires.
D'où, $dimE_0\big(N(1,1)\big) = 4 - rg\big(N(1,1)\big) = 4 - 2 = 2$.
On déduit :
$dimE_{1-\sqrt{3}}\big(N(1,1)\big) + dimE_{1+\sqrt{3}}\big(N(1,1)\big) + dimE_0\big(N(1,1)\big) \geq 4$.
Or, d'après le cours, comme $N(1,1) \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$, on a aussi :
$dimE_{1-\sqrt{3}}\big(N(1,1)\big) + dimE_{1+\sqrt{3}}\big(N(1,1)\big) + dimE_0\big(N(1,1)\big) \leq 4$.
Ainsi, $dimE_{1-\sqrt{3}}\big(N(1,1)\big) + dimE_{1+\sqrt{3}}\big(N(1,1)\big) + dimE_0\big(N(1,1)\big) = 4$.
D'après le théorème de réduction, $N(1,1)$ est diagonalisable.
$N(1,1)$ et $M(1,1)$ sont les matrices d'un même endomorphisme, elles sont donc semblables, ce qui garantit que $M(1,1)$ est diagonalisable également.

f)•On a ici : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de T

$\Longleftrightarrow T - \lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow det(T - \lambda I) = 0$

$\Longleftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 \times (-3) = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2 + 2 = 0$ équation sans solution.

Donc T n'admet aucune valeur propre.

• Raisonnement par l'absurde. Supposons que $M(1,-1)$ est diagonalisable.
Alors, $N(1,-1)$ qui lui est semblable, est diagonalisable aussi.
$N(1,-1)$ possède alors au moins une valeur propre λ.
λ est nécessairement nulle car sinon la question 5)d) entrainerait que λ est valeur propre de T.
Ainsi, $N(1,-1)$ n'a que 0 comme valeur propre.
Etant diagonalisable, elle s'écrit $N(1,-1) = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale, nulle puisqu'elle doit porter sur sa diagonale la valeur propre 0.
On obtient alors : $N(1,-1) = 0$, ce qui est absurde.

On conclut que $M(1,-1)$ n'est pas diagonalisable.

g)Commençons par chercher d'où provient l'inégalité de droite.

λ est valeur propre de T

$\Longleftrightarrow T - \lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow det(T - \lambda I) = 0$

$\Longleftrightarrow (a-\lambda)(b-\lambda) - a \times (3b) = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2 - (a+b)\lambda - 2ab = 0.$

Le discriminant vaut : $\Delta = (a+b)^2 - 8ab = a^2 + 10ab + b^2$.

Distinguons 3 cas :

• $\Delta < 0$
T ne possède pas de valeur propre. Alors, la seule valeur propre de $N(a,b)$ est 0 et $N(a,b)$ ne peut pas être diagonalisable. (Reprendre le raisonnement fait en 5)f)).

• $\Delta = 0$
T ne possède qu'une seule valeur propre λ_0. Par ailleurs, $\lambda_0 \neq 0$ car T est inversible (en effet, $det(T) = ab - 3ab = -2ab \neq 0$).
$E_{\lambda_0}(T)$ est de dimension 1. En effet, s'il était de dimension 2, T serait diagonalisable donc semblable à la matrice $\lambda_0 I$.
Soit $\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)$ une base de $E_{\lambda_0}(T)$.

Tous les vecteurs propres de T associés à λ_0 sont alors colinéaires à $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ donc de la forme $\begin{pmatrix} \alpha x_0 \\ \alpha y_0 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq 0$.

La question 5)d) montre que la seule valeur propre non nulle de $N(a,b)$ est λ_0 et que les vecteurs propres de $N(a,b)$ associés à λ_0 sont de la forme : $\begin{pmatrix} \alpha x_0 \\ \alpha y_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc colinéaires à $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cela entraîne que $dim\big(E_{\lambda_0}(N(a,b)\big) = 1$.

Enfin, $dim\big(E_{\lambda_0}(N(a,b)\big) + dim\big(E_0(N(a,b)\big) = 2 + 1 = 3 < 4$.
D'après le théorème de réduction, $N(a,b)$ n'est pas diagonalisable.

• $\Delta > 0$
T possède deux valeurs propres distinctes (non nulles) λ_1 et λ_2.
D'après la question 5)d), λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de $N(a,b)$.
On a alors : $dim\big(E_{\lambda_1}(N(a,b)\big) \geq 1$ et $dim\big(E_{\lambda_2}(N(a,b)\big) \geq 1$.
D'où $dim\big(E_{\lambda_1}(N(a,b)\big) + dim\big(E_{\lambda_2}(N(a,b)\big) + \underbrace{dim\big(E_0(N(a,b)\big)}_{=2} \geq 4$.

Finalement : $dim\big(E_{\lambda_1}(N(a,b)\big) + dim\big(E_{\lambda_2}(N(a,b)\big) + dim\big(E_0(N(a,b)\big) = 4$.
D'après le théorème de réduction, $N(a,b)$ est diagonalisable.

Conclusion :
On a montré que $N(a,b)$ est diagonalisable $\iff a^2 + 10ab + b^2 > 0$.

$M(a,b)$ et $N(a,b)$ étant la matrice du même endomorphisme f, elles sont semblables, ce qui justifie l'équivalence : $M(a,b)$ diagonalisable $\iff N(a,b)$ diagonalisable.

Finalement, $M(a,b)$ est diagonalisable $\iff a^2 + 10ab + b^2 > 0$.

> Remarque
> Une question pénible à rédiger, si on veut vraiment tout détailler !