DM8
à rendre le lundi / /

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie la donnée de $U_0 \geq 0$ et par la relation $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1)Montrer que $\forall x \geq 0,\ |f'(x)| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

2)En étudiant les variations de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, montrer que l'équation $f(x) = x$ a une seule solution α sur $\mathbf{R}_+$.
Donner une valeur approchée de α à 0.1 près.

3)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \geq 0$.

4)Déduire des questions précédentes que $\forall n \in \mathbf{N},\ |U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}|U_n - \alpha|$.

5)Conclure que $\forall n \in \mathbf{N} : |U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 2

Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t.$$

1)Montrer que φ est bien définie sur $\mathbf{R}$.

2)Etablir que φ est impaire.

3)Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi'(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}\sqrt{x^2+1}}$.

indication : introduire une primitive F de $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

4)a)En utilisant que $\forall t \geq 0,\ t^2 \leq t^2 + 1 \leq (t+1)^2$, montrer que

$$\forall x > 0,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq \varphi(x) \leq \ln 2.$$

b)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

c)Dresser le tableau de variations complet de φ.

d)Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$.